

Algebra und Zahlentheorie.

Bottema, O.: Über Potenzreihen von Matrices. *Nieuw Arch. Wiskde* **17**, 114—118 (1932) [Holländisch].

Ist A eine Matrix, deren charakteristische Determinante teilbar ist durch $(\lambda - \lambda_1)^{p_1}(\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots$, während ihre ersten Unterdeterminanten den größten gemeinsamen Teiler $(\lambda - \lambda_1)^{p_1 - e_1}(\lambda - \lambda_2)^{p_2 - e_2} \dots$ haben, so ist für die Konvergenz der Potenzreihe $f(A) = \sum_0^\infty a_n A^n$ notwendig und hinreichend die Konvergenz der

Reihen $\sum_{n=0}^\infty \binom{n}{e_i} a_n \lambda_i^{n - e_i - 1}$. *van der Waerden* (Leipzig).

Eddington, A. S.: On sets of anticommuting matrices. *J. London Math. Soc.* **7**, 58 bis 68 (1932).

Let E_1, E_2, \dots, E_n be matrices of four rows and columns which satisfy

$$E_\mu^2 = -1; \quad E_\mu E_\nu = -E_\nu E_\mu. \quad (\mu \neq \nu)$$

Then the number n of matrices in the set is ≤ 5 ; and if the matrices are required to be wholly real or wholly imaginary, there are three real and two imaginary matrices in a set of five. *van der Waerden* (Leipzig).

Gröbner, Wolfgang: Über Minimalbasen für die Invariantenkörper zyklischer und metazyklischer Permutationsgruppen. *Anz. Akad. Wiss., Wien* Nr **5**, 43—44 (1932).

Bezüglich des in der Überschrift genannten Problems konnte u. a. folgendes Teilergebn erzielt werden: 1. Satz: Sind die Minimalbasen für die zyklischen Gruppen Z_l und Z_m der Ordnungen l und m in den Zahlkörpern $R(\alpha_1)$, beziehungsweise $R(\alpha_2)$ bekannt und sind l und m teilerfremd, so ist auch die Minimalbasis für die zyklische Gruppe Z_n der Ordnung $n = l \cdot m$ im Zahlkörper $R(\alpha_1, \alpha_2)$ bekannt. Gelten die Voraussetzungen auch für die metazyklischen Gruppen, die zu den zyklischen Z_l und Z_m gehören, so sind die Minimalbasen für die entsprechenden zur Z_n gehörigen metazyklischen Gruppen ebenfalls im entsprechenden zusammengesetzten Zahlkörper konstruierbar. *Autoreferat.*

Köthe, Gottfried: Über Schiefkörper mit Unterkörpern zweiter Art über dem Zentrum. *J. f. Math.* **166**, 182—184 (1932).

Es wird ein Beispiel eines Schiefkörpers angegeben, der einen maximalen kommutativen Unterkörper zweiter Art über dem Zentrum des Schiefkörpers enthält. Ferner wird bewiesen, daß jeder Schiefkörper von endlichem Rang über dem Zentrum einen maximalen kommutativen Unterkörper enthält, der Erweiterung erster Art des Zentrums ist. *Grell* (Jena).

Deuring, Max: Zur Theorie der Normen relativzyklischer Körper. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. I*, Nr **24**, 199—200 (1931).

Bekanntlich gilt für relativquadratische Zahlkörper die folgende einfache Tatsache: Ist die nichtquadratische Zahl a Norm einer Zahl des Körpers $k(\sqrt{b})$, so ist b Norm einer Zahl des Körpers $k(\sqrt{a})$. Verf. beweist eine Verallgemeinerung dieser Eigenschaft für zyklische Radikalkörper über einem beliebigen Grundkörper k , deren Relativgrad nicht durch die Charakteristik teilbar ist. Zum Beweise werden hyperkomplexe Methoden herangezogen, und zwar wird der Satz durch eine elegante Schlußweise auf eine Aussage über die Gruppe der Algebrenklassen mit dem Zentrum k zurückgeführt. *Taussky* (Göttingen).

Lo Voi, Antonino: *Intorno alla costruzione delle matrici di Riemann e alle loro moltiplicazioni complesse.* Rend. Circ. mat. Palermo 55, 287—357 (1931).

Dans le premier chapitre, l'auteur expose, en supposant seulement connue une partie du mémoire de Scorza [Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann ed alcune sue applicazioni; Rend. Circ. mat. Palermo 41 (1916)], les principaux résultats déjà acquis dans la théorie des matrices de Riemann: existence d'une base finie I, A_1, \dots, A_h pour les substitutions riemanniennes d'une matrice ($h =$ indice de multiplicabilité), réduction de Bagnera-De Franchis, existence d'une base minima de $k + 1$ formes ($k =$ indice de singularité) pour les systèmes riemanniens nuls, théorie des pseudoaxes (espaces réels de points singuliers d'une homographie dégénérée égale à une combinaison linéaire à coefficients réels d'homographies riemanniennes), enfin construction des matrices de Riemann non singulières ($k = 0$) pour $h = 0$ et 1. — La construction des matrices de Riemann ayant été ramenée par Scorza à celle des matrices pures, l'auteur ramène à son tour (Chap. II) la construction de celles-ci à la construction des matrices pures qui n'admettent pas de pseudoaxes isolés. Il donne ensuite (§ 3) une première méthode pour la construction des matrices singulières (le titre, qui porte par erreur „matrices non singulières“, est rectifié dans le mémoire analysé ci-dessous). — L'auteur introduit ensuite (Chap. III) le groupe diédrique pour les matrices d'indices $k = 0, h = 3$, ce qui lui permet de leur étendre la réduction de Bagnera-De Franchis et d'effectuer leur construction. Une autre application consiste en la détermination des transformations birationnelles transformant en elle-même une variété abélienne non singulière (§ 3). — Dans le Chapitre IV vient l'étude du groupe diédrique successivement pour les matrices de 1^e, 2^e et 3^e espèce, et la construction de ces matrices. Le mémoire se termine par l'étude des matrices pures à pseudoaxes non isolés et de genre ≤ 4 . P. Dubreil (Paris).

Lo Voi, Antonino: *Complementi alla memoria „Intorno alla costruzione delle matrici di Riemann e alle loro moltiplicazioni complesse“.* Rend. Circ. mat. Palermo 55, 477—488 (1931).

Dans ce mémoire, l'auteur se propose de préciser et de développer (§ 1) certains points du mémoire précédent. Il montre ensuite (§ 2) que l'équation minima d'une substitution riemannienne symétrique de rang maximum d'une matrice de Riemann privée de pseudoaxes isolés admet des racines qui s'expriment toutes rationnellement en fonction d'une d'entre elles. Le dernier paragraphe contient quelques précisions supplémentaires. P. Dubreil (Paris).

McCoy, Neal H.: *On the resultant of three double binary forms.* Ann. of Math., II. s. 33, 177—183 (1932).

This paper treats the problem of eliminating the variables (x, y) from three equations $f(x, y) = 0; g(x, y) = 0; h(x, y) = 0$ where (f, g, h) are polynomials of degrees (m, n, p) , respectively, in the variable x and of degrees (λ, μ, ν) , respectively, in the variable y . The principal theorem affirms the existence of an irreducible function R of the coefficients of the three forms f, g, h (which is unique save for a multiplicative numerical constant) such that $R \equiv \Phi_1 f + \Phi_2 g + \Phi_3 h$ where (Φ_1, Φ_2, Φ_3) are polynomials in the variables (x, y) . R is homogenous of degree $n\nu + p\mu$ in the coefficients of f , of degree $m\nu + p\lambda$ in the coefficients of g and of degree $m\mu + n\lambda$ in the coefficients of h . If the coefficients are weighted in the usual manner R is isobaric of weight $m\nu\nu + m\mu\mu + n\mu\lambda$ with regard to x and of weight $m\nu\mu + n\nu\lambda + p\lambda\mu$ with regard to y . R is expressed in determinant form by Sylvester's method of elimination; more exactly R is expressed in the form D/T where D is a determinant involving the coefficients of the three polynomials f, g, h and T is a power of one of the coefficients of one of these polynomials. Murnaghan (Baltimore).

Mordell, L. J.: *On the representation of a binary quadratic form as a sum of squares of linear forms.* Math. Z. 35, 1—15 (1932).

Gefragt wird nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür,

daß sich eine gegebene binäre quadratische Form mit rationalen Koeffizienten $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2$ in der Gestalt $f(x, y) = \sum_{r=1}^n (a_r x + b_r y)^2$ darstellen läßt (n eine gegebene positive ganze Zahl, die a_r, b_r rational). Diese Bedingungen werden vollständig aufgestellt und bewiesen. Sodann wird unter der Annahme, daß a, h, b ganz und ihr größter gemeinsamer Teiler quadratfrei ist, untersucht, wann eine Darstellung mit ganzen a_r, b_r möglich ist. In zwei neueren Arbeiten des Verf. [J. f. Math. 167, 12—19 (1932); vgl. dies. Zbl. 3, 193; und Bull. Amer. Math. Soc. (noch nicht erschienen)] sind die diesbezüglichen Resultate vervollständigt. Endlich wird die Fragestellung auf definite Formen von $N > 2$ Variablen ausgedehnt. Sie lassen sich als Summe von $N + 3$ Quadraten linearer Formen darstellen. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Pall, Gordon: On sums of two or four values of a quadratic function of x . Trans. Amer. Math. Soc. 34, 98—125 (1932).

Es sei $q(x) = \frac{1}{2}mx^2 + \frac{1}{2}nx + c$, m, n, c ganz, $m > 0$, $m + n$ gerade. Die kleinste Zahl, welche die Form $q(x_1) + \dots + q(x_s)$ hat für $x_i \geq w$, sei λ . Die Arbeit behandelt das Problem: die größte Anzahl aufeinanderfolgender Zahlen $\geq \lambda$ zu bestimmen, die nicht die Form $q(x_1) + \dots + q(x_s)$ haben. Bedeutet F_k die Tabelle aller nach der Größe geordneten Zahlen $q(x_1) + \dots + q(x_s)$, $x_i \geq -k$, dann versteht man unter einem Sprung in F_k die Differenz zweier aufeinanderfolgender Zahlen von F_k . Beschränkung auf $s = 2$ und 4. Für $s = 2$ wird das Problem erledigt durch den Satz: In F_k kommt jeder beliebige Sprung vor. Die Gleichung $N = q(x_1) + q(x_2)$ ist äquivalent mit $8mN + 2n^2 - 16mc = (2mx + n)^2 + (2my + n)^2 \dots (1)$. Nun werden für $Ax^2 + Bxy + Cy^2$, $B^2 - 4AC$ kein Quadrat, für jedes k , k aufeinanderfolgende Zahlen gebildet, die alle nicht durch diese Form dargestellt werden können. Also gibt es dann auch für jedes r , $8m(r+1)$ aufeinanderfolgende Zahlen, die alle nicht eine Summe von zwei Quadraten sind; daher gibt es, für jedes r , r aufeinanderfolgende Zahlen N , für welche (1) nicht gilt. — Für $s = 4$ wird alles sehr viel komplizierter. Der Cauchysche Hilfssatz über die Auflösbarkeit der Gleichungen $a = x_1^2 + \dots + x_4^2$; $b = x_1 + \dots + x_4$ wird benutzt, und für diesen wird ein Beweis skizziert; es wird $q(x) = \mu x^2 + \nu x$ genommen. In 20 Hilfssätzen und 6 Sätzen werden die größten Sprünge in F_k bestimmt, bei gewissen Ungleichheiten zwischen μ und ν ; z. B.: Für $0 < \nu \leq \frac{1}{3}\mu$ ist der größte Sprung in F_1 gleich $\mu - |\nu|$. Man sehe für $\mu = 3, \nu = \pm 2$ dies. Zbl. 1, 267. *N. G. W. H. Beeger* (Amsterdam).

Driel, M. J. van: Geränderte magische Quadrate. Nieuw Arch. Wiskde 17, 163—168 (1932) [Holländisch].

Bildung von m. Q. mit 25 Feldern mit besonderer Eigenschaft. Ein Stifelsches m. Q. mit 81 Feldern. Zehn Ränder werden gegeben, womit man 2880 Stifelsche m. Q. bilden kann aus m. Q. mit 9 Feldern. *N. G. W. H. Beeger* (Amsterdam).

Brauer, Alfred: Über die Verteilung der Potenzreste. Math. Z. 35, 39—50 (1932). k sei eine beliebige natürliche Zahl und p eine Primzahl aus der arithmetischen Progression $p \equiv 1 \pmod{k}$. l bezeichne die Maximallänge der in den k Klassen der k -ten Potenzreste und Nichtreste vorkommenden Sequenzen. Verf. sucht l nach oben abzuschätzen. Seine Hauptergebnisse sind die folgenden: Stets ist

$$l < \sqrt{2p} + 2; \quad (1)$$

jedoch können in $k - 1$ der k Klassen nur Sequenzen auftreten, deren Längen kleiner als \sqrt{p} sind. Genügt ferner der kleinste k -te Nichtrest $d \pmod{p}$ der Bedingung $d < \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{p}$, so gilt statt (1) die für $p > 200$ schärfere Abschätzung

$$l < \sqrt{p} + \frac{1}{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{p} + 2.$$

Insbesondere gilt diese Abschätzung für $k > 4$ und alle hinreichend großen Primzahlen p . Schließlich wird gezeigt, daß auch für $k \leq 4$ und alle hinreichend großen Primzahlen p die Ungleichung (1) sich verschärfen läßt. Die Beweismethoden überschreiten nicht den Rahmen der elementaren Zahlentheorie. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Morduchai-Boltowskoi, D.: Das Theorem über die Hypertranszendenz der Funktion $\zeta(s, x)$ und einige Verallgemeinerungen. Tôhoku Math. J. 35, 19–34 (1932).

Verf. zeigt die Transzendental-Transzendenz einer Funktionenklasse, zu der die Funktion $\zeta(s, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}$ als Spezialfall gehört. Wenn $\zeta(s, x)$ einer algebraischen Differentialgleichung $F\left(x, s, \zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial s}, \dots\right) = 0$ genügt, so muß für jede Primzahl κ auch die Teilreihe $\eta(s, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\kappa k}}{\kappa^k s}$ derselben Differentialgleichung genügen. Daraus kann eine algebraische Differentialgleichung $G\left(x, s, \eta, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \dots\right) = 0$ hergeleitet werden, die allein Ableitungen nach x enthält, ganze rationale Koeffizienten hat und nicht von κ abhängt; ein Verfahren von Hurwitz führt daraus zu einem Widerspruch. — Die Arbeit enthält viele sinnentstellende Druckfehler. *K. Mahler* (Krefeld).

Evelyn, C. J. A., and E. H. Linfoot: On a problem in the additive theory of numbers. III. Math. Z. 34, 637–644 (1932).

Für ganzes $N \geq 2$ bezeichne $\nu_s(n) = \nu_{s,N}(n)$ die Darstellungsanzahl einer natürlichen Zahl n als Summe von s natürlichen, durch kein p^N (N te Primzahlpotenz) teilbaren Zahlen (für $N = 2$ z. B. sind es quadratfreie Zahlen). In der vorliegenden Abhandlung leiten Evelyn und Linfoot für $s \geq 2$

$$(1) \nu_s(n) = \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} \frac{1}{\zeta^s(N)} \prod_{p^N | n} \left(1 + \frac{(-1)^{s+1}}{(p^N - 1)^s}\right) \prod_{p^N \nmid n} \left(1 + \frac{(-1)^s}{(p^N - 1)^{s-1}}\right) + O\left(n^{s-2+\frac{2}{N+1}+\varepsilon}\right)$$

aus dem in II elementar bewiesenen Spezialfall $s = 2$ (s. dies. Zbl. 1, 202) durch Induktion her und verschärfen damit zugleich das in I mit dem bekannten Hardy-Littlewoodschen Verfahren der additiven Zahlentheorie gegebene Restglied $O\left(n^{s-\frac{3}{2}+\frac{1}{2N}+\varepsilon}\right)$, $s \geq 3$. In der inzwischen veröffentlichten IV haben sie allerdings auf dem in I eingeschlagenen Wege $O\left(n^{s-2+\frac{1}{N}+\frac{1}{s-1}\frac{N-1}{N}}\right)$ erreicht [nicht, wie ich im Zbl. 1, 203 angab, $O\left(n^{s-2+\frac{2}{N+1}+\varepsilon}\right)$]. Der vorliegende Beweis von (1) ist an einigen Stellen nicht ganz einwandfrei, läßt sich aber leicht in Ordnung bringen (vgl. dies. Zbl. 2, 15).

A. Walfisz (Radość, Polen).

Page, A.: An asymptotic formula in the theory of numbers J. London Math. Soc. 7, 24–27 (1932).

Es sei $Q_{k,l}(n)$ die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n als Summe zweier natürlicher Zahlen, von denen die erste durch keine k te, die zweite durch keine l te Primzahlpotenz teilbar ist. Page weist nach, daß für $k \geq l \geq 2$

$$(1) Q_{k,l}(n) = n \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k} - \frac{1}{p^l}\right) \prod_{p^l | n} \left(1 + \frac{1}{p^k - p^{k-l} - 1}\right) + O\left(n^{\frac{k+l-2}{kl-1}+\varepsilon}\right)$$

ist, die Produkte über Primzahlen erstreckt. Als Spezialfall $k = l$ ergibt sich hieraus für $k \geq 2$

$$(2) Q_{k,k}(n) = n \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^k}\right) \prod_{p^k | n} \left(1 + \frac{1}{p^k - 2}\right) + O\left(n^{\frac{2}{k+1}+\varepsilon}\right).$$

(2) ist von Evelyn und Linfoot elementar bewiesen worden (das Hauptglied tritt bei ihnen in leicht abgeänderter Schreibweise auf) und sodann wesentlich einfacher von Estermann (s. dies. Zbl. 1, 202 u. 1, 127). In der vorliegenden Note wird der Estermannsche Beweis auf (1) übertragen. *A. Walfisz* (Radość, Polen).

Paley, R. E. A. C.: A theorem of characters. J. London Math. Soc. 7, 28–32 (1932).

Es sei k eine natürliche Zahl, χ ein Restcharakter mod k ; Verf. beweist eine Abschätzung

$$\sum_{m=1}^n \chi(m) = O(\sqrt{k} \log \log k), \quad n \geq 1$$

die für $k \rightarrow \infty$ in der üblichen Weise gemeint ist. (Es gibt eine Folge von ins Unendliche wachsenden k , zu jedem solchen k ein χ und ein n und zu der Folge der k ein $A > 0$, derart, daß

$$\left| \sum_{m=1}^n \chi(m) \right| \geq A \sqrt{k} \log \log k.)$$

Zum Beweise wird zunächst die Pólyasche Formel

$$\frac{1}{2} \chi(n) + \sum_{m=1}^{n-1} \chi(m) = \frac{\sqrt{k}}{\pi} \varepsilon(\chi) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(m)}{m} \sin \frac{2mn\pi}{k},$$

die für primitives χ mit $\chi(-1) = +1$ gilt, herangezogen ($|\varepsilon(\chi)| = 1$). Die Summe rechts wird in zwei Teile $\sum_{m=1}^k + \sum_{m=k+1}^{\infty}$ zerlegt. Der erste Teil wird bis auf einen Fehler $O(1)$ durch

$$\sum_{m=1}^k \frac{\bar{\chi}(m)}{m} \sin m\Theta, \quad n < k \frac{\Theta}{2\pi} < n+1,$$

wiedergegeben. Für den zweiten Teil findet sich mit Hilfe der früher vom Verf. aufgestellten Transformationsformel der Funktion

$$\frac{1}{2} \chi(n) + \sum_{h=1}^{\infty} \chi(n+h) e^{-hx},$$

die für $x = 1$ angewendet wird, gleichfalls eine Abschätzung

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(m)}{m} \sin \frac{2mn\pi}{k} = O(1),$$

so daß insgesamt

$$\text{Max}_{1 \leq n \leq k} \left| \sum_{m=1}^n \chi(m) \right| = \frac{\sqrt{k}}{\pi} \text{Max}_{0 \leq \Theta \leq 2\pi} \left| \sum_{m=1}^k \frac{\bar{\chi}(m)}{m} \sin m\Theta \right| + O(\sqrt{k}).$$

Nun ist, wenn $1 \leq N < k$,

$$\sum_{m=1}^N \frac{\bar{\chi}(m)}{m} \sin m\varphi = O(1) + \sum_{m=1}^N \frac{\bar{\chi}(m)}{m} \left(1 - \frac{m}{N}\right) \sin m\varphi.$$

Drückt man die Summe rechts durch das Fejérsche Integral der Funktion

$$\sum_{m=1}^k \frac{\bar{\chi}(m)}{m} \sin m\Theta$$

aus, so wird ersichtlich, daß

$$\sum_{m=1}^N \frac{\bar{\chi}(m)}{m} \sin m\varphi \leq \text{Max}_{0 \leq \Theta \leq 2\pi} \left| \sum_{m=1}^k \frac{\bar{\chi}(m)}{m} \sin m\Theta \right| + O(1).$$

Die gewünschte Abschätzung nach unten ergibt sich hier unmittelbar, wenn man auf der linken Seite nach Wahl geeigneter N und k für $\chi(m)$ den eigentlichen Charakter, der aus $\left(\frac{k}{m}\right)$ entsteht, und für φ den Wert $\frac{\pi}{2}$ einträgt. *Petersson* (Hamburg).

Košljakov, N.: Über eine Verallgemeinerung der Ramanujanschen Identitäten. Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Otděl. mat. i estest. Nauk, VII. s. Nr 8, 1089—1102 (1931). Verf. verallgemeinert die Ramanujan-Watsonsche Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4m+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \frac{B_{2m+1}}{4m+8},$$

wo $m > 0$ ganz und B_{2m+1} die $(2m+1)$ -ste Bernoullische Zahl ist, auf Dirichletsche Reihen, die einer ähnlichen Funktionalgleichung wie die Riemannsche Zetafunktion genügen. Eine Wiedergabe seines Resultats ist ohne großen Formelaufwand unmöglich.

Als spezielles Beispiel sei die folgende Formel erwähnt: Ist $\zeta_d(s) = \sum_{n=1}^{\infty} F(n)n^{-s}$ die Dedekindsche Zetafunktion eines quadratischen Zahlkörpers der Diskriminante $d < -4$ und der Klassenzahl h , so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} n F(n) \sigma(n) = -\frac{h^2}{8\pi}, \quad \text{wo} \quad \sigma(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} n^{-s} \frac{\zeta_d(1-s)}{\cos \pi s/2} ds.$$

Hans Heilbronn (Göttingen).

Bernstein, Vladimiro: Sui punti singolari situati sulla retta di olomorfia di certe serie di Dirichlet. Rend. Ist. lombardo Sci., II. s. 64, 1167—1183 (1931).

Dans un travail précédent [Rend. Ist. Lombardo Sci. 63, 321—413 (1930)] l'auteur a démontré que si la suite $\{\lambda_n\}$ est mesurable et de densité D , et si la quantité

$$\delta = \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \log \left| \frac{1}{C'(\lambda_n)} \right| \right\} \quad \text{où} \quad C(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right) \quad (1)$$

est finie, la fonction

$$h(s) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{C'(\lambda_n)} e^{-\lambda_n s} \quad (2)$$

est holomorphe sur le segment $|t| < 2\pi D$ ($s = \sigma + it$) de son axe d'holomorphie.

D'autre part quelle que soit la suite $a_n \neq 0$, la fonction (3) $f(s) = \sum_1^{\infty} a_n e^{-\mu_n s}$ admet au moins un point singulier sur chaque segment de longueur $2\pi D_1$ où D_1 est la densité maxima de la suite $\{\mu_n\}$. δ est la distance entre l'axe d'holomorphie et celui de convergence de (2). Cette distance pour toute série $\sum b_n e^{-\lambda_n s}$ ne dépasse pas δ . L'auteur se pose la question suivante: Une suite $\{\mu_n\}$ étant donnée soit δ la distance maxima entre l'axe d'holomorphie et celui de convergence des séries de Dirichlet correspondantes. Une série de ce type pour laquelle la distance précitée est inférieure à δ peut elle être holomorphe sur un segment de longueur $2\pi D$ de son axe d'holomorphie? La réponse est négative (en général). La longueur du segment sur l'axe d'holomorphie sur lequel $\sum a_n e^{-\mu_n s}$ peut être holomorphe dépend donc non seulement de la densité de la suite $\{\mu_n\}$, mais encore de la distance entre l'axe d'holomorphie et celui de convergence.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Analysis.

Wygodski, M. J.: Einführung in die Infinitesimalrechnung. Moskau-Leningrad: Staatl. wiss. techn. Buchhandl. 1931. 452 S. [Russisch.]

Das Buch will eine Einführung in die Infinitesimalrechnung geben, die mehr auf die Anwendung dieser Disziplin auf Geometrie, Physik und Technik zugeschnitten ist als auf den strengen logischen Aufbau; eine Theorie der Grenzwerte fehlt daher in diesem Buche. Wie in den meisten neueren Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung ist auch in diesem Buch der schroffe Gegensatz zwischen Differential- und Integralrechnung beseitigt. Verf. geht aber ganz streng den historischen Weg, um von konkreten Aufgaben aus den Zugang zu den Anwendungen zu gewinnen.

U. Wegner (Darmstadt).

Alaci, V.: Eine Klasse von Identitäten abgeleitet aus Reihenentwicklungen. Direkte Division zweier Polynome. Anwendungen. Rev. mat. Timișoara 11, 121—125 (1932) [Rumänisch].

Ausgehend von einfachen Identitäten werden andere Entwicklungen hergeleitet, z. B. eine für $(1 + x + \dots + x^{n-1})^p$, die von Moivre (Miscellanea Analytica 1730, 196) und Désiré André [Ann. École norm. 5 (1876)] gefunden wurde.

Abramescu (Cluj).

Bernstein, S.: Exemple d'une fonction continue pour laquelle la formule d'interpolation trigonométrique de Lagrange diverge. C. R. Acad. Sci. URSS Nr 13, 365—366 (1931).

Estermann, T.: On Ostrowski's gap theorem. J. London Math. Soc. 7, 19—20 (1932).

A new and simple proof of Ostrowski's well known gap theorem: If a power series $\sum b_m z^m = f(z)$ possesses an infinite number of „large“ gaps: $b_m = 0$ for $n_{2k-1} < m < n_{2k}$, where $n_{2k}/n_{2k-1} > 1 + \varepsilon$, $n_{2k+1} > n_{2k}$ ($k = 1, 2, \dots$), then the series $\sum_{(k)}^{n_{2k+1}} b_m z^m$ converges uniformly in a full neighbourhood of every regular point of $f(z)$ on the circle of convergence.

A. Zygmund (Wilno).

Julia, Gaston: Mémoire sur l'extension du théorème d'Abel aux séries d'itérées $\sum_0^\infty a_n R_n(z)$. Ann. École norm., III. s. 48, 439—495 (1931).

Es sei $R(z)$ eine rationale Transformation mit dem Fundamentalkreis $|z| = 1$. Sie hat entweder einen anziehenden Fixpunkt α innerhalb $|z| = 1$ und einen zweiten, in bezug auf $|z| = 1$ symmetrischen Fixpunkt β außerhalb des Fundamentalkreises, oder sie hat nur einen anziehenden Fixpunkt α auf $|z| = 1$. Im ersten Falle besteht das Gebiet Δ_α , wo die Iterierten $R_n(z)$ gegen α konvergieren aus dem Kreisinne $|z| < 1$, während Δ_β gleich $|z| > 1$ ist. Im zweiten Falle ist Δ_α die ganze Ebene, vermindert um eine perfekte diskontinuierliche Punktmenge auf $|z| = 1$. Der Verf. hat früher bewiesen (Acta Math. 56, 149), daß die Konvergenz der Reihe $\sum a_n$ eine notwendige und hinreichende Bedingung darstellt, damit $\sum a_n R_n(z)$ sowohl in Δ_α als in Δ_β konvergent sei, vorausgesetzt, daß $\alpha \neq 0$. Wenn $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, wird die Bedingung für Δ_α durch die Konvergenz der Reihe $\sum a_n s^n$ und für Δ_β durch die Konvergenz von $\sum a_n/s_1^n$ ersetzt (s und s_1 sind die beiden konjugiert komplexen Multiplikatoren von α und β). — Zunächst sei $\alpha \neq 0$, $\sum a_n$ konvergent und $z = 1$ ein repulsiver Fixpunkt von $R(z)$. Dann zeigt der Verf., daß sowohl die innerhalb $|z| = 1$ definierte Funktion $F(z) = \sum a_n R_n(z)$ als die durch dieselbe Reihe dargestellte Funktion außerhalb $|z| = 1$ den Grenzwert $\sum a_n$ besitzen, wenn z gegen 1 strebt längs eines Weges, der den Einheitskreis nicht berührt. Im Falle $\alpha = 0$ erhält man dasselbe Resultat, aber unter der Bedingung, daß die Reihe $\sum a_n/s_1^n$ konvergiert. Die Methode, durch welche der Verf. zu diesem Resultat gelangt, ist dieselbe, die er früher zum Beweis des gewöhnlichen Abelschen Satzes verwendet hat, und beruht wesentlich auf geometrischen Betrachtungen. Besonders im zweiten Falle sind große Schwierigkeiten zu überwinden, aber eben deshalb hat der Verf. diesen Fall um so eingehender untersucht.

Ahlfors (Paris).

Seynsehe, Ingeborg: Zur Theorie der fastperiodischen Zahlfolgen. Rend. Circ. mat. Palermo 55, 395—421 (1931).

Eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen $f(s)$ ($s = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$) heißt fastperiodisch, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine ganze Zahl $l(\varepsilon) > 0$ gibt derart, daß unter je l aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen mindestens eine zu ε gehörige Verschiebung τ vorkommt von der Beschaffenheit, daß $|f(s + \tau) - f(s)| \leq \varepsilon$ für alle s ausfällt (vgl. A. Walther, Abh. math. Sem. Hamburg 6, 217—237). Im 3. Abschnitt wird bewiesen, daß die Werte einer gleichmäßig stetigen fastperiodischen Funktion in äquidistanten Punkten eine fastperiodische Folge bilden, und daß man umgekehrt zu

jeder fastperiodischen Folge eine für alle reellen x definierte fastperiodische Funktion konstruieren kann, die für die ganzen Werte von x mit der gegebenen Folge übereinstimmt. In zwei ersten Abschnitten wird dagegen die Theorie der fastperiodischen Folgen unabhängig entwickelt, die vollkommen parallel zur Theorie der Bohrschen fastperiodischen Funktionen verläuft. Insbesondere ergibt sich die Beziehung zwischen einer fastperiodischen Folge und ihrer Fourierentwicklung als eineindeutig, wenn man die Frequenzen λ_n der Bedingung $0 \leq \lambda_n < 2\pi$ unterwirft. *W. Stepanoff* (Moskau).

Moore, C. N.: Summability of series. Amer. Math. Monthly **39**, 62–71 (1932).

A short account of the most fundamental results of the theory of divergent series.

A. Zygmund (Wilno).

Differentialgleichungen :

Goldstein, S.: A note on certain approximate solutions of linear differential equations of the second order. (II.) Proc. London Math. Soc., II. s. **33**, 246–252 (1932).

Es werden angenäherte Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - [h^2 \chi_0(x) + h \chi_1(x)] y = 0$$

für große Werte des Parameters h aufgesucht, wobei zugelassen wird, daß $\chi_0(x)$ mehrfache Nullstellen besitzt. Insbesondere werden die Fälle $\chi_0(x) = +\lambda^2 x^2$ bzw. $\chi_0(x) = -\lambda^2 x^2$ explizite behandelt. *Rellich* (Göttingen).

Vitolo, Donato: Sopra alcune equazioni differenziali lineari di secondo ordine. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. **69**, 162–175 (1931).

Es wird eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung betrachtet, die sich durch eine einfache Transformation auf eine besondere Gleichung der Form

$$x^2 y''(x) = (x^{2\lambda} + \lambda b x^\lambda + c) y(x) \quad (b, c \text{ Konstanten; } \lambda \text{ ganze positive Zahl})$$

umgestalten läßt. Die Ergebnisse von Torelli [Giorn. Mat. Battaglini **17** (1928)] über eine solche verallgemeinerte Riccatische Differentialgleichung werden dann auf den betreffenden Sonderfall angewandt. *G. Cimmino* (Napoli).

Clemente, Pasquale: Ricerche intorno alle soluzioni periodiche di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. **69**, 185–220 (1931).

Verf. untersucht verschiedene Fragen in bezug auf die gewöhnliche selbstadjungierte Differentialgleichung (mit periodischen Koeffizienten)

$$\frac{d}{dx} \left(\theta \frac{dy}{dx} \right) + \lambda A(x) y = f(x), \quad \theta > 0, \quad A > 0$$

nebst periodischen Randbedingungen

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b).$$

In Kapitel I werden die von Picard [Rend. Circolo mat. Palermo, **29** (1910)] im Fall $\theta \equiv 1$ schon bewiesenen Hauptresultate über die Eigenwerte des betreffenden Problems wieder erhalten. In Kapitel II werden die Minimumeigenschaften der Eigenwerte μ_k durch die Methoden von Picone abgeleitet, d. h. es wird zunächst bewiesen, daß, wenn $y(x)$ unter der Bedingung variieren soll, in allen Punkten des Intervalls (a, b) , in welchen die Eigenfunktion n_k gleich Null ist, zu verschwinden, dann das Minimum des Integrals

$$I_k[y] = \int_a^b \left[\theta \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \mu_k A y^2 \right] dx$$

gleich Null ist, und nur dann tatsächlich erreicht wird, wenn $y(x) = \alpha \mu_k(x)$; woraus dann folgt, daß dieselbe Minimumeigenschaft gilt, wenn $y(x)$ unter der Hilbertschen Bedingung (Orthogonalität in bezug auf die $k-1$ ersten Eigenfunktionen) variieren soll. Im letzten Kapitel stützt sich der Verf. auf die bewiesenen Minimumeigenschaften, um mehrere Abschätzungen für die Lösung $y(x)$ der betrachteten Randwertaufgabe und für die Ableitungen von $y(x)$ zu gewinnen. *G. Cimmino* (Napoli).

Pfeiffer, Georges: Sur les équations plus générales que celles de Riccati. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 69, 232–236 (1931).

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = Py^n + Qy^{n-1} + \dots + Ry + S \quad (y, P, Q, \dots, S \text{ Funktionen von } x)$$

läßt sich als eine Funktion von partikulären Lösungen zusammenstellen oder nicht, je nachdem $n \leq 2$ oder $n > 2$. Diese bekannte Tatsache wird hier in Beziehung gesetzt dazu, daß die simultane Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen

$$1. \text{ Ordnung} \quad y^k \frac{\partial f}{\partial y} + u^k \frac{\partial f}{\partial u} + w^k \frac{\partial f}{\partial w} + \dots = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

möglich ist oder nicht, je nachdem $n \leq 2$ oder $n > 2$. *G. Cimmino (Napoli).*

Pasquier: Sur les équations $s = f(x, y, z, p, q)$ intégrables par la méthode de Darboux. C. R. Acad. Sci. Paris 194, 349–350 (1932).

Aufsuchung aller Differentialgleichungen der Form $s = f(x, y, z, p, q)$, die für jedes ihrer charakteristischen Systeme eine Involution 2. Ordnung und eine solche 3. Ordnung besitzen. *Lüneburg (Göttingen).*

Steen, S. W. P.: The application of quadratic forms in an infinity of variables to boundary problems in partial differential equations. Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 23–34 (1932).

Der Hauptteil (Abschnitt II) der Arbeit beschäftigt sich mit der Auffindung der Eigenwerte und Eigenfunktionen bei dem zweiten Randwertproblem von (1) $\Delta \Phi + \lambda \Phi = 0$ für ein vorgelegtes Gebiet G , das im Inneren des Einheitsquadrates R liegt. $\Phi(x, y)$ wird als nach den Eigenfunktionen des ersten Randwertproblems von (1) in R entwickelt mit unbestimmten Koeffizienten angesetzt; die Lösung des Problems ergibt sich dann im wesentlichen durch simultane Transformation der beiden quadratischen Formen

$$H(\Phi) = \iint_G \Phi^2 dx dy \quad \text{und} \quad D(\Phi) = \iint_G (\Phi_x^2 + \Phi_y^2) dx dy$$

von unendlich vielen Veränderlichen auf kanonische Gestalt. (Diese Transformationstheorie wird im Anschluß an Hilbert in Abschnitt I skizziert.) Für den Fall, daß G ein „Greensches Gebiet“ ist, d. h. daß für G die Greensche Formel gilt, wird die gestellte Aufgabe gelöst, desgleichen wenn sich G in gewisser Weise aus endlich oder abzählbar vielen Greenschen Gebieten aufbauen läßt. Abschnitt III gibt Hinweise zur Anwendung der gleichen Methode beim ersten und dritten Randwertproblem ($\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} + \sigma \Phi = 0$ am Rand mit $\sigma \geq 0$) für die Gleichung (1) und endlich für die Behandlung der allgemeineren Gleichung

$$(p\Phi_x)_x + (p\Phi_y)_y - q\Phi + \lambda \varrho \Phi = 0. \quad (p > 0, q \geq 0, \varrho \geq 0)$$

R. Iglisch (Aachen).

Devisme, Jacques: Sur quelques équations aux dérivées partielles. C. R. Acad. Sci. Paris 194, 516–519 (1932).

Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\sum_{i=2}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_i^2} \right) = 0$$

geht durch eine spezielle lineare Transformation der Variablen ξ über in eine gewisse Differentialgleichung 3. Ordnung $\Delta_{3,n} U = 0$; z. B. liefert

$$\Delta_{3,3} U = U_{xxx} + U_{yyy} + U_{zzz} - 3U_{xyz} = 0$$

einen von P. Humbert näher betrachteten Typus. Die Note enthält eine Reihe allgemeiner Tatsachen über diese Differentialgleichungen $\Delta_{3,n} U = 0$.

Lüneburg (Göttingen).

Capoulade, Jean: Des ensembles impropres. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 426—428 (1932).

Comme suite à un résultat antérieur (cf. Zbl. **1**, 63), l'auteur s'occupe du problème de Dirichlet relatif à une équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + Cu = 0,$$

en vue d'étudier l'influence des singularités des coefficients sur le fait que certains ensembles deviennent impropres ou cessent de l'être; les résultats prolongent ceux de M. Bouligand (cf. Zbl. **2**, 134, 135). Si

$$xA = a_0 + f(x, y), \quad x^2 C = b_0 + g(x, y),$$

B, f, g étant continus, et les deux derniers étant nuls avec x , l'aut. indique des cas où le segment de l'axe Oy intérieur à la région considérée est un ensemble impropre, et d'autres où il est un ensemble propre. Ensuite l'aut. étend ce résultat à certains cas où l'axe Oy est remplacé par une courbe suffisamment régulière. Voulant montrer qu'un ensemble impropre pour une équation à coefficients réguliers peut devenir propre pour une équ. à coeff. singuliers, l'aut. considère les équ. à trois variables

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda_1 \frac{x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{\lambda_2 f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{x^2 + y^2 + z^2} u = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda_1 \frac{x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}}{x^2 + y^2} + \frac{\lambda_2 f(\sqrt{x^2 + y^2}, z)}{x^2 + y^2} u = 0,$$

avec $\lambda_2 f \leq 0$ dans les deux cas; il indique des cas où l'origine est un ensemble propre pour la 1^{re} équ. (p. ex. si $\lambda_2 = 0, \lambda_1 < 0$) et d'autres où elle est un ensemble impropre; pour l'autre équ., l'axe Oz a des propriétés identiques. *Giraud* (Clermont-Ferrand).

Kiang, Tsai-Han: On the critical points of non-degenerate Newtonian potentials. Amer. J. Math. **54**, 92—109 (1932).

Der Verf. gibt Anwendungen der Morseschen Untersuchungen [Al. Morse, Trans. Amer. Math. Soc. **33** (1931)] zum Nachweis der Existenz und zur Bestimmung der Anzahl von verschiedenen stationären Punkten des Newtonschen Potentials. Aus einer ganzen Reihe von Sätzen sei hier nur ein charakteristisches Resultat angeführt: Es sei gegeben eine Verteilung von positiven oder negativen Massen auf oder im Innern von $p + n$ verschiedenen geschlossenen Flächen E_1, E_2, \dots, E_{p+n} von der Klasse C''' . Es wird angenommen, daß keine zwei von diesen Flächen einen gemeinsamen Punkt im Innern enthalten, und es bedeute $2g_k$ die Bettische Zahl von E_k . Die Ableitung des Newtonschen Potentials dieser Massenverteilung nach der äußeren Normalen sei auf E_i ($i = 1, 2, \dots, p$) positiv und auf E_j ($j = p + 1, p + 2, \dots, p + n$) negativ. Wenn die Gesamtmasse nicht gleich Null ist, so besitzt die Potentialfunktion im ganzen Außenraum (in bezug auf die $E_k, k = 1, 2, \dots, p + n$) nicht weniger als $p + n - 1$ + $\left| \sum_{i=1}^p g_i - \sum_{j=p+1}^{p+n} g_j \right|$ stationäre Punkte. Es wird auch der Fall betrachtet, wo die Gesamtmasse gleich Null ist.

L. Schnirelmann (Moskau).

Jung, Heinrich: Ein Beitrag zur Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ mittels Greenscher Funktionen. J. f. Math. **166**, 185—192 (1932).

Es wird für den Fall, daß k ein Eigenwert der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ für eine homogene Randbedingung ist, so daß also die Konstruktion einer Greenschen Funktion im gewöhnlichen Sinne versagt, eine Greensche Funktion im erweiterten Sinne konstruiert. Diese genügt selbst nicht mehr der homogenen, sondern einer geeignet gewählten inhomogenen Randbedingung, gestattet aber die Darstellung der Lösung des unter gewissen Bedingungen lösbaren inhomogenen Randwertproblems in ähnlicher Weise wie die gewöhnliche Greensche Funktion.

Lüneburg (Göttingen).

Cioranescu, N.: Sur les fonctions harmoniques conjuguées. Bull. Sci. math., II. s. 56, 55—64 (1932).

Notwendig und hinreichend dafür, daß zwei harmonische Funktionen u und v in der Ebene konjugiert sind, ist, daß auch $w = \log [(u + \lambda)^2 + (v + \mu)^2]$ für alle λ, μ eines Intervalls harmonisch ist. Dieser Satz gestattet einige Eigenschaften der harmonischen Funktionen auf analytische zu übertragen; z. B. folgt, daß eine beschränkte monogene Funktion keine isolierten Ausnahmepunkte haben kann. Entsprechend kann man im Raume vorgehen und drei harmonische Funktionen u, v, w konjugiert nennen, wenn für alle λ, μ, ν eines Bereiches die Funktion

$$1/\sqrt{(u + \lambda)^2 + (v + \mu)^2 + (w + \nu)^2}$$

harmonisch wird. In n Dimensionen hat man an Stelle des Logarithmus die Grundlösung $1/r^{n-2}$ zu nehmen. Willy Feller (Kiel).

Ghermanesco, M.: Sur certains systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles du type elliptique. C. R. Acad. Sci. Paris 194, 430—432 (1932).

Es wird gezeigt, daß die Integration gewisser Differentialgleichungssysteme vom elliptischen Typus zurückgeführt werden kann auf die Integration einer Differentialgleichung höherer Ordnung von der Form

$$\Delta^{(n)}u + \lambda_1 \Delta^{(n-1)}u + \dots + \lambda_n u = F,$$

wobei die λ_i Konstante sind.

Lüneburg (Göttingen).

Ghermanesco, M.: Sur les fonctions n -métaharmoniques. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 415—421 (1931).

Als Grundlösungen der Differentialgleichung

$$\Delta^n u + \lambda_1 \Delta^{n-1} u + \dots + \lambda_n u = 0$$

ergeben sich gewisse nur von der Entfernung r im p -dimensionalen Raum abhängige Funktionen, die einer gewöhnlichen Differentialgleichung vom Typus der Besselschen Differentialgleichung genügen; sie besitzen die Form $v = Ar^{2-p} + B$, wobei A und B reguläre Funktionen sind. Wie im Fall der Potentialgleichung wird sodann eine Greensche Funktion konstruiert und mit ihrer Hilfe u. a. die verallgemeinerte Dirichletsche Aufgabe gelöst: Eine Funktion u zu bestimmen, die in einem p -dimensionalen Gebiet D der obigen Differentialgleichung genügt und auf dem Rande von D nebst den Ableitungen $\Delta u, \dots, \Delta^{n-1} u$ vorgeschriebene Werte annimmt. Lüneburg.

Robert, Jean-Pierre: Le problème de Riquier et ses généralisations. C. R. Acad. Sci. Paris 194, 428—430 (1932).

Die Aufgabe, in einem Gebiet D eine Lösung der Gleichung $\Delta^{(n)}u = 0$ zu bestimmen, die auf dem Rande F dieses Gebietes nebst ihren $n - 1$ ersten Laplaceschen Iterierten vorgeschriebene Werte annimmt, wird folgendermaßen behandelt. Es sei Q die kürzeste Entfernung eines Punktes P in D vom Rande und C_P der um P mit Q beschriebene Kreis. Setzt man

$$U_0 = u, \quad U_k = \Delta^{(k)}u, \quad (k = 1, \dots, n - 1)$$

so ergibt sich für die U_k ein System von linearen Integralgleichungen; z. B. für 2 Dimensionen geschrieben:

$$\frac{1}{\pi Q^2} \int_{C_P} U_k(m) d\sigma_m = \sum_{\nu=0}^{n-k-1} \frac{B_\nu}{\nu+1} Q^{2\nu} U_{k+\nu}(P), \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1)$$

wobei die B_ν bestimmte Konstante sind. Aus einer früheren Arbeit des Verf. ergibt sich, daß dieses System eindeutig bestimmte Lösungen U_k besitzt, die am Rande F vorgeschriebene Werte annehmen und außerdem den Differentialgleichungen $\Delta U_k = U_{k+1}$ genügen; $u = U_0$ muß daher die Lösung des oben formulierten Riquierschen Problems sein. Dieselbe Methode kann auch bei der entsprechenden Aufgabe für die n -metaharmonische Differentialgleichung verwendet werden (vgl. dies. Zbl. 3, 308).

Lüneburg (Göttingen).

Nicolesco, Miron: Sur le problème de Riquier. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 682—683 (1932).

Zur Lösung der Aufgabe, eine Funktion $u(P)$ zu bestimmen, die in einem n -dimensionalen Gebiet D der Gleichung $\Delta^{(p)}u = f(P)$ genügt und auf dem Rande nebst den $p - 1$ ersten Laplaceschen Iterierten vorgeschriebene Werte annimmt, wird eine Folge von Greenschen Funktionen $\bar{G}_i(P, A)$ „höherer Ordnung“ eingeführt, definiert durch die Rekursionsformel

$$\bar{G}_i(P, A) = \int_D G(P, Q) \bar{G}_{i-1}(Q, A) dQ. \quad (i = 2, \dots, p)$$

Hierbei ist $G_1(P, A) = G(P, A)$ bis auf einen konstanten Faktor die für den Ausdruck Δu gebildete Greensche Funktion im gewöhnlichen Sinne. Mit Hilfe dieser Funktionen ergibt sich eine explizite Darstellung der Lösung der obigen Aufgabe.

Lüneburg (Göttingen).

Vernotte, Pierre: Propagation d'une vitesse d'échauffement dans une barre métallique non calorifugée. Vitesse de propagation. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 541—544 (1932).

Ein Drahtstück (Strecke oder Halbgerade) überall gleicher Temperatur werde zur Zeit $t = 0$ im Endpunkt $x = 0$ plötzlich erhitzt. Das ergibt für die Lösung $u(x, t)$ der Wärmeleitungsgleichung die Bedingung: $\partial u / \partial x$ verschwindet für $t = 0$ überall mit Ausnahme des Nullpunktes. Es wird mit Hilfe einer Fourier-Entwicklung die Verteilung von $\partial u / \partial t$ betrachtet.

Willy Feller (Kiel).

Variationsrechnung:

● **Bliss, G. A.:** Variationsrechnung. Deutsch. Ausgabe. Hrsg. v. F. Schwank. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1932. VIII, 128 S. u. 47 Abb. geb. RM. 6.30.

Das Buch — eine Übersetzung des Bliss'schen „Calculus of Variations“ — stellt unter den vorhandenen Lehrbüchern zweifellos die müheloseste Einführung in die Anfangsgründe der Variationsrechnung dar. Das Schwergewicht des Inhaltes liegt dabei in den rein mathematisch interessierenden Dingen, insbesondere den hinreichenden Bedingungen. Die für die Anwendungen wichtigen Entwicklungen finden sich nicht; schon deshalb nicht, weil durchweg nur der einfachste Fall einer einzigen gesuchten Funktion und einer unabhängigen Veränderlichen behandelt wird. Der Stoff ist historisch angeordnet: An den klassischen Problemen (kürzeste Entfernung, Brachistochrone, Rotationskörper kleinster Oberfläche) werden die Begriffsbildungen der Variationsrechnung entwickelt und die so gewonnenen Ergebnisse zusammengefaßt in einer allgemeinen Theorie der notwendigen und hinreichenden Bedingungen

für das Problem $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx = \min$. — Die Darstellung ist sehr sorgfältig und zeichnet sich durch großes pädagogisches Geschick aus. Rellich (Göttingen).

Mammana, Gabriele: Sul problema preliminare di una classica questione di calcolo delle variazioni. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **10**, 1—31 (1932).

The author discusses properties of the extremals of the integral $\int_{x_1}^{x_n} y^{1/n} \sqrt{1 + y'^2} dx$, $n > 0$. The special case in which $n = 1$ and in which the extremals are catenaries has been treated fully by MacNeish [Ann. of Math. **7**, 65 (1905); see also Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung. S. 81, 320]. It is shown that for a given point $P_0(x_0, y_0)$ there exists a domain E such that every point in its interior can be connected with P_0 by two extremals, points exterior to E do not lie on extremals through P_0 , while a point on its boundary Γ can be joined to P_0 by an unique extremal. This boundary is studied in detail. Together with P_0 it constitutes the envelope of the family of extremals through P_0 and is symmetric with respect to the line $x = x_0$. For $n \geq 1$ it is tangent to the X -axis at the point $(x_0, 0)$ and extends to infinity on both sides of the line $x = x_0$. For $n < 1$, it has a corner point at $(x_0, 0)$ and has two asymptotes

parallel to the Y -axis. The extremals have, for $n < 1$ two asymptotes $x = x_0 \pm ny_0 J(\theta)$, where θ is the inclination of the extremal at (x_0, y_0) ; the extremal $\Gamma(\bar{\theta})$ determined by the value $\bar{\theta}$ for which $J(\theta)$ reaches its maximum, divides the right half of the domain E into two parts E'' and E' bounded by $x = x_0, \Gamma(\bar{\theta})$ and by $\Gamma(\bar{\theta}), \Gamma$ respectively. Two extremals for which $\theta > \bar{\theta}$ lie in E'' and do not have any points in common besides P_0 . Of the two extremals which pass through a point in E'' , one lies entirely in E'' , the other does not. It follows that an extremal for which $\theta > \bar{\theta}$, does not contain a point conjugate to P_0 ; arcs of such an extremal satisfy the necessary conditions for a minimum. Extremals for which $\theta \leq \bar{\theta}$ contain a single point P'_0 conjugate to P_0 , and the tangents to such an extremal at P_0 and P'_0 meet on the X -axis. Of two extremal arcs P_0Q which pass through a point Q of E' , that one furnishes a minimum for which the slope at P_0 is the greater. — The results of this paper extend the earlier results obtained for the catenary; they also complete in an essential respect the conclusions reached by the author in the *Rend. Circ. mat. Palermo* **49**, 206 (1925).

Arnold Dresden (Swarthmore).

Whitney, Hassler: Note on Perron's solution of the Dirichlet problem. (*Dep. of Math., Univ., Princeton.*) *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **18**, 68—70 (1932).

Es wird ein neuer Beweis für denjenigen Teil der bekannten Perronschen Lösung des Dirichletschen Problems gegeben, in dem nachgewiesen wird, daß die von Perron eingeführte Grenzfunktion $u(x, y)$ eine harmonische Funktion ist.

Rellick (Göttingen).

Zita, Kurt: Beiträge zu einem Variationsproblem von Zermelo. Breslau: Diss. 1931. 31 S.

Das von E. Zermelo formulierte und behandelte Navigationsproblem (vgl. dies. Zbl. **1**, 341) wird neuerlich studiert und unter speziellen Annahmen auch explizit gelöst. Es wird das analoge Problem auf der Kugel gestellt. Die inzwischen erschienenen Arbeiten über denselben Gegenstand (T. Levi-Civita, vgl. dies. Zbl. **2**, 144, und R. v. Mises, vgl. dies. Zbl. **3**, 12) sind nicht berücksichtigt.

Rellick (Göttingen).

Jacob, Rudolf: Bestimmung konjugierter Punkte im Sinne der Variationsrechnung mit Anwendung elliptischer Funktionen. Breslau: Diss. 1931. 33 S.

The author discusses the trajectories of a particle when the potential function has the form $U = \varepsilon r^n$, $\varepsilon = \pm 1$. For certain cases the existence or non-existence of pairs of conjugate points on these trajectories is demonstrated. The cases discussed may be listed as follows:

$$(1) \quad n = -4, \quad \varepsilon = +1, \quad h > a^4/4,$$

where h is the energy, and a is one of the constants of the trajectory;

$$2a) \quad n = -3, \quad \varepsilon = +1, \quad h > 0; \quad 2b) \quad n = -3, \quad \varepsilon = +1, \quad h < 0;$$

$$3a) \quad n = 4, \quad \varepsilon = +1, \quad h < 0; \quad 3b) \quad n = 4, \quad \varepsilon = +1, \quad h > 0;$$

$$3c) \quad n = 4, \quad \varepsilon = -1; \quad 4a) \quad n = 1, \quad \varepsilon = +1, \quad h > 0;$$

$$4b) \quad n = 1, \quad \varepsilon = +1, \quad h < 0; \quad 4c) \quad n = 1, \quad \varepsilon = -1.$$

In all these cases the coordinates of the particle are expressible in terms of elliptic functions. By means of explicit formulas and inequalities, it is shown that conjugate points exist in cases 2b, 3a, 3c, 4b, 4c, and that no conjugate points exist in cases 1, 2a, 3b, 4a. The author states that a considerable part of his results have already been secured by other methods, referring to Kober, Breslau: Diss. 1910; Koschmieder, Breslau: Diss. 1910; Merget, Prüfungsarbeit Breslau; and Sachs, *Math. Z.* **27**. As preliminary material, the author develops some formulas for the differentiation of elliptic functions with respect to the modulus, some inequalities, and certain other formulas relating to the elliptic functions of Jacobi. Graves (Chicago).

Spezielle Funktionen:

Basoco, Miguel A.: Note on certain theta constants. Tôhoku Math. J. 35, 60—63 (1932).

Aus den Jacobischen Additionsformeln für die Thetafunktionen, von denen als Beispiel die folgende genannt sei:

$$\vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_1(x+y) \vartheta_0(x-y) = \vartheta_0(x) \vartheta_1(x) \vartheta_2(y) \vartheta_3(y) + \vartheta_2(x) \vartheta_3(x) \vartheta_0(y) \vartheta_1(y), \quad (1)$$

werden Beziehungen zwischen den Nullwerten der Thetafunktionen und ihrer Ableitungen gefolgert, indem auf beiden Seiten in Potenzreihen nach x und y entwickelt und das Prinzip der Koeffizientenvergleichung angewandt wird. So folgt z. B. aus (1):

$$\begin{aligned} \vartheta_2 \vartheta_3 \sum_{l=0}^s \sum_{r=0}^t (-1)^l \binom{s}{l} \binom{t}{r} \vartheta_0^{(t-r+l)} \vartheta_1^{(s+r-l)} \\ = \sum_{l=0}^s \sum_{r=0}^t \binom{s}{l} \binom{t}{r} [\vartheta_0^{(r)} \vartheta_1^{(t-r)} \vartheta_2^{(l)} \vartheta_3^{(s-l)} + \vartheta_0^{(l)} \vartheta_1^{(s-l)} \vartheta_2^{(r)} \vartheta_3^{(t-r)}], \end{aligned}$$

wo $s \geq 0$, $t \geq 0$ ganze Zahlen mit ungerader Summe $s+t$ sind. Im ganzen werden fünf Formeln von diesem Typus aufgestellt. Durch Spezialisieren von s und t auf kleine Werte ergeben sich zum Teil sehr einfache und elegante Relationen, die anscheinend bisher noch nicht bemerkt worden waren, wie z. B.

$$\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} \right)^2 = \frac{\vartheta_0^{(IV)}}{\vartheta_0} + \frac{\vartheta_2^{(IV)}}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3^{(IV)}}{\vartheta_3}. \quad \text{Bessel-Hagen (Bonn).}$$

Petersson, Hans: Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen. Acta math. 58, 169—215 (1932).

Die Bestimmung eines vollen Systems von linear unabhängigen Modulformen gegebener Art und der reellen Dimension $-r$, welche irgendeiner Untergruppe Γ_0 der Modulgruppe und einem gegebenen Multiplikatorsystem $v(L)$ des Betrages 1 gehören, kann im Falle $r > 2$ auf die Betrachtung der Reihen

$$G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma_0; R) = \sum_{M \in \mathfrak{S}(A)} \frac{e^{\frac{2\pi i M \tau}{N}} R\left(e^{\frac{2\pi i M \tau}{N}}\right)}{v(M)(m_1 \tau + m_2)^r},$$

wo $\mathfrak{S}(A)$ ein volles System von Matrizen $M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$ aus der Nebengruppe $A\Gamma_0$ bezeichnet, deren zweite Zeilen m_1, m_2 alle voneinander verschieden sind, im Falle $r=2$ der Reihe

$$G_{-2}(s; \tau) = \sum_{M \in \mathfrak{S}(A)} \frac{R\left(e^{\frac{2\pi i M \tau}{N}}\right)}{(m_1 \tau + m_2)^2 |m_1 \tau + m_2|^s}$$

für $s=0$ zurückgeführt werden. Zweck der vorliegenden Arbeit ist, die Entwicklungskoeffizienten der betreffenden Modulformen insbesondere hinsichtlich ihrer Größenordnung zu untersuchen. Nachdem der Verf. schon früher den speziellen Fall der Eisensteinschen Reihen $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma_0, 1)$, wo $\kappa=0$, $r>2$ behandelt hat, für deren Koeffizienten die Fourierreiheentwicklung einen Ausdruck der Form

$$N^{-r} \sum_{\substack{m_1 \in \mathfrak{S}(A) \\ m_1 \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1}}{|m_1|^r} \left(\sum_{j \in \mathfrak{R}(m_1)} \frac{e^{\frac{2\pi i (n+j) \cdot j}{m_1 N}}}{v(m_1, j)} \right) \left(\int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} \frac{e^{-2\pi i (n+j)x} dx}{x^r} \right) \quad \alpha > 0$$

gibt, wird hier für die Koeffizienten der allgemeinen Funktion $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma_0; R_r)$ ein analoger Ausdruck gefunden, wo die oben auftretende Summe durch verallgemeinerte Kloostermansche Summen und das Integral im wesentlichen durch ein Bessel-

sches Integral ersetzt wird. Für die Größenordnung der Koeffizienten wird eine Abschätzung gefunden, welche bei Formen, die in einer parabolischen Spitze exponentiell unendlich werden, in einer engen Beziehung zu der Hardy-Ramanujanschen Formel für die Anzahl $p(n)$ der Partitionen der natürlichen Zahl n steht. Die hier gegebene Methode, welche auch bei anderen Grenzkreisgruppen anwendbar ist, sobald die Bildungsgesetze der Substitutionskoeffizienten in hinreichendem Maß beherrscht werden, kann bei allgemeinen Klassen von analytischen Funktionen zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten aus den Funktionalbeziehungen und Regularitätseigenschaften der Funktionen angewandt werden. *Myrberg* (Helsinki).

Rademacher, Hans: Bestimmung einer gewissen Einheitswurzel in der Theorie der Modulfunktionen. *J. London Math. Soc.* **7**, 14–19 (1932).

Die Funktion $f(x) = 1/(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots$ genügt einer Transformationsformel

$$f\left(e^{2\pi i \frac{iz+h}{k}}\right) = \omega_{h,k} \sqrt{z} e^{\frac{\pi}{12k} \left(\frac{1}{z} - z\right)} f\left(e^{2\pi i \frac{z+h'}{k}}\right),$$

wo $(h, k) = 1$, $hh' \equiv -1 \pmod{k}$, $\Im m z > 0$ und $\omega_{h,k}$ eine gewisse arithmetische Funktion von h und k bezeichnet. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um die explizite Bestimmung dieser arithmetischen Funktion $\omega_{h,k}$, welche, zusammen mit einem anderen Resultat des Verf., den seit Hermite hier üblichen Umweg über die Theorie der ϑ -Funktionen vermeidet. Für die Theorie der Modulfunktionen ist diese Frage insofern von Bedeutung, als

$$f\left(e^{2\pi i \tau}\right) = e^{\pi i \frac{\tau}{12}} \sqrt[24]{\Delta(\tau)};$$

die obige Transformationsformel entspringt aus der Tatsache, daß $\sqrt[24]{\Delta(\tau)}$ eine zur vollen Modulgruppe gehörige Modulform der Dimension $-\frac{1}{2}$ ist, welche sich also bei Ausübung einer Modulsstitution $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gemäß der Gleichung

$$\sqrt[24]{\Delta(S\tau)} = v(S) \sqrt{c\tau + d} \sqrt[24]{\Delta(\tau)}$$

umsetzt. Bei der obigen Formel ist die Substitution $M = \begin{pmatrix} h & k' \\ k & h' \end{pmatrix}$ anzuwenden, und man erkennt leicht, daß

$$\omega_{h,k} = e^{\pi i \frac{(h-h')}{12k}} \sqrt[24]{v(M)}.$$

Es wird also in der Arbeit des Verf. insbesondere das Multiplikatorsystem $v(M)$ bestimmt, und diese Bestimmung ist deswegen von Interesse, weil gerade dies Multiplikatorsystem $v(M)$ unter den 12 verschiedenen Multiplikatorsystemen halbzahlgiger Dimension der vollen Modulgruppe als das einzige ausgezeichnet ist, zu welchem es eine alsdann eindeutig bestimmte ganze Modulform der Dimension $-\frac{1}{2}$ gibt [nämlich $\sqrt[24]{\Delta(\tau)}$], welche in allen parabolischen Spitzen verschwindet. Die Rechnung, welche zur Bestimmung von $\omega_{h,k}$ führt, basiert auf der Formel

$$\omega_{h,k} = e^{\pi i s(h,k)}, \quad s(h,k) = \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{\mu}{k} \left(\frac{h\mu}{k} - \left[\frac{h\mu}{k} \right] - \frac{1}{2} \right).$$

Die $s(h,k)$ treten in der Transformationsformel der Funktion $g(x) = \log f(x)$ auf, wie sie in den Dedekindschen Erläuterungen zu einem Riemannschen Fragment über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen zu finden ist. Die Auswertung der $s(h,k)$ läßt sich mit rein arithmetischen Mitteln in äußerst einfacher Weise durchführen. Es werden dabei Gitterpunktanzahlungen und eine Formel für die Summe

$$t(h,k) = \sum_{\mu=1}^{k-1} \mu \left[\frac{h\mu}{k} \right]$$

angewendet, vermöge deren $ht(h, k) + kt(k, h)$ durch einen einfachen ganzen rationalen Ausdruck in h und k darstellbar ist. Das Restsymbol $\left(\frac{h}{k}\right)$ erscheint in dem schließlichen Ergebnis der Rechnung zufolge der Tatsache, daß

$$\left(\frac{h}{k}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(k-1)} \left[\frac{2\lambda h}{k}\right]}. \quad (k > 0, k \equiv 1(2), (h, k) = 1)$$

Hans Petersson (Hamburg).

Paley, R. E. A. C.: Some theorems on orthogonal functions. *Studia Math.* (Lwów) **3**, 226—238 (1931).

Let $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots$ be a real orthonormal set of functions over $(0, 1)$ which is uniformly bounded, $|\varphi_n(t)| \leq B$. Let $c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*, \dots$ be the sequence $|c_0|, |c_1|, \dots, |c_n|, \dots$ rearranged in descending order of magnitude. Let p, q be arbitrary numbers satisfying $1 < p \leq 2 \leq q$, and A_p, A_q positive constants (not necessarily the same in all the formulas) which depend only on B and on p, q respectively. The following theorems are proved: I. If the series $\sum c_n^{*q} n^{q-2}$ converges, then $f(t) \in \sum c_n \varphi_n(t) \subset L^q$ and $\int_0^1 |f|^q dt \leq A_q \sum_0^\infty c_n^{*q} (n+1)^{q-2}$. II. If the function $f(t)$ above $\subset L^p$ then

$$\sum_0^\infty c_n^{*p} (n+1)^{p-2} \leq A_p \int_0^1 |f|^p dt.$$

III. If $S(t) = \sup_{0 \leq m < \infty} \left| \sum_0^m c_n \varphi_n(t) \right|$ then, for $q > 2$,

$$\int_0^1 S^q(t) dt \leq A_q \sum_0^\infty c_n^{*q} (n+1)^{q-2} \leq A_q \left(\sum_0^\infty |c_n| q' \right)^{q-1}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Theorems I, II are extensions to an arbitrary orthonormal set of analogous theorems proved by Hardy and Littlewood for Fourier series [*J. London Math. Soc.* **6**, 3—9 (1931); this *Zbl.* **1**, 135], the proof being entirely different. The author gives direct proofs for specialized values of q (for instance for q an even integer) and extends his result to general case by means of convexity properties of the bounds of linear and bilinear transformations, established by M. Riesz [*Acta Math.* **49**, 465—497 (1926)].

J. D. Tamarkin (Providence).

Fejér, Lipót: Über die Summe ultrasphärischer Polynome. *Mat. fiz. Lap.* **38**, 161 bis 163 u. dtsh. Zusammenfassung 164 (1931) [Ungarisch].

Le polynome ultrasphérique $P_n^{(\alpha)}(x)$, défini par la fonction génératrice $(1-2xz+z^2)^{-\alpha}$, généralise le polynome de Legendre $P_n(x) \equiv P_n^{(1/2)}(x)$. L'auteur étend au $P_n^{(\alpha)}(x)$ une propriété de $P_n(x)$ démontrée par lui en 1908 (Voir aussi: *Acta Litt. Sci. Szeged*, 1925, t. 2 fasc. 2 p. 75—87) et il prouve que pour $|x| < 1$ et $n = 0, 1, 2, \dots$ on a

$$P_0^{(\alpha)}(x) + P_1^{(\alpha)}(x) + P_2^{(\alpha)}(x) + \dots + P_n^{(\alpha)}(x) > 0,$$

si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ ou $\alpha = -\frac{1}{2}$. Cette inégalité n'est plus valable, si $|\alpha| > \frac{1}{2}$. La question reste ouverte pour $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$.

E. Kogbelliantz (Paris).

Relton, F. E.: Note on an associated Legendre function connected with the anchor ring. *J. London Math. Soc.* **7**, 21—24 (1932).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. *Zbl.* **1**, 64) von Relton tritt die Formel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos m\theta}{(\nu + \cos\theta)^{n+1/2}} d\theta = (-1)^{m-n} \frac{2^{3/2} \pi^{1/2}}{\Gamma(n - \frac{1}{2})(\nu^2 - 1)^{n/2}} Q_{m-1/2}^n(\nu)$$

auf; darin ist $|\nu| > 1, |\arg \nu| < \pi$; in physikalischen Anwendungen sind m und n in der Regel ganze Zahlen und $\nu = \cosh \alpha$, wo α eine positive Zahl bedeutet. Zunächst wird die Richtigkeit der angegebenen Formel für ganzzahliges m und n bewiesen. Einer Anregung von Hobson folgend wird unter den allgemeineren Voraussetzungen:

m ganze Zahl, n beliebig und α so beschaffen, daß $\Re(\text{cth } \alpha) > 0$ und $\text{cth } \alpha$ nicht dem Bereich von 1 bis $-\infty$ angehört, die Formel

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos m \theta}{(\text{ch } \alpha + \cos \theta)^{n+1/2}} d\theta = e^{(m-n)i\pi} \frac{2^{3/2} \pi^{1/2}}{\Pi(n - \frac{1}{2}) \text{sh } \alpha} Q_{m-1/2}^n(\text{ch } \alpha)$$

abgeleitet.

F. Knoll (Wien).

Lehmer, D. H.: *Arithmetical periodicities of Bessel functions.* (California Inst. of Technol., Pasadena.) Ann. of Math., II. s. 33, 143–150 (1932).

Die allgemeine Lösung der rekurrenten Reihe $U_{n+1} = a(n + \alpha) U_n + c U_{n-1}$ läßt sich durch die beiden partikulären Lösungen

$$S_n(a, \alpha, c) = a^{n-1} \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \left(\frac{c}{a^2}\right)^k \binom{n-k-1}{2} \frac{\Gamma(n-k+\alpha)}{\Gamma(k+\alpha+1)}, \quad n > 0$$

$$T_n(a, \alpha, c) = a^n \sum_{k=0}^{[(n-2)/2]} \left(\frac{c}{a^2}\right)^{k+1} \binom{n-k-2}{k} \frac{\Gamma(n-k+\alpha)}{\Gamma(k+\alpha+2)}, \quad n > 1$$

in der Form $U_n = U_0 T_n + U_1 S_n$ ausdrücken. Die bekannte Rekursionsformel der Bessel-Funktionen führt zu der Erkenntnis, daß auch die Funktionen

$$J_n^*(a, \alpha, c) = (-c)^{n/2} J_{n+\alpha} \left(\frac{2\sqrt{-c}}{a}\right), \quad Y_n^*(a, \alpha, c) = (-c)^{n/2} Y_{n+\alpha} \left(\frac{2\sqrt{-c}}{a}\right)$$

partikuläre Lösungen sind; es folgt daraus die Formel

$$(-c)^{n/2} J_{n+\alpha}(\gamma) = J_\alpha(\gamma) T_n(a, \alpha, c) + \sqrt{-c} J_{\alpha+1}(\gamma) S_n(a, \alpha, c), \quad \gamma = \frac{2\sqrt{-c}}{a}.$$

Die folgenden Untersuchungen behandeln U_n modulo M , einer Zahl, die prim ist zu a . Ist $\alpha \equiv -\varrho \pmod{M}$ und eine ganze Zahl $k \geq 0$, so ist $U_{\varrho+k} \equiv c^k U_{\varrho-k} \pmod{M}$. Ist n eine ganze Zahl, so ist $U_{n+2M} \equiv c^M U_n \pmod{M}$. Ist ac prim zu M und ist e der Exponent, zu welchem $c \pmod{M}$ gehört, dann ist $U_n \pmod{M}$ periodisch mit der Periode $2eM$. Sind λ und μ beliebige ganze Zahlen und ist $U_{n+\lambda M} \equiv \mu U_n \pmod{M}$ für zwei aufeinanderfolgende Werte von n richtig, dann ist es für alle Werte von n richtig. Ist ac prim zu M , dann ist die Eigenperiode von $U_n \pmod{M}$ teilbar durch M . Ist $a \equiv -2\varepsilon\alpha$, $\varepsilon = \pm 1$, und M prim zu a , dann gilt für eine beliebige ganze Zahl λ , $U_{M+\lambda} \equiv U_{\varepsilon-\lambda} c^{\lambda+(M-\varepsilon)/2} \pmod{M}$. Ist $a \equiv -2\varepsilon\alpha$, $\varepsilon = \pm 1$, dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Eigenperiode möglichst klein werde, gegeben durch $c \equiv 1$ und $U_\varepsilon \equiv U_0$. Ist r eine ganze Zahl und $a(\varrho + \alpha) \equiv 0 \pmod{M}$, dann ist $S_{2rM} \equiv S_{2(rM+\varrho)} \equiv T_{2rM+1} \equiv T_{2(rM+\varrho)+1} \equiv 0 \pmod{M}$. F. Knoll (Wien).

Burchall, J. L., and T. W. Chaundy: *A note on the hypergeometric and Bessel's equations.* II. Quart. J. Math., Oxford Ser. 2, 289–297 (1931).

This Note is a continuation and generalization of a previous paper [Quart. J. Math., Oxford Ser. 1, 186–195 (1930)]. It deals with the generalized hypergeometric equation

$$\Pi(\delta - a)y = x^m \Pi(\delta + b)y, \quad (1)$$

to which the substitution $y = \Pi(\delta - c)z$ is applied, transforming it into an equation of similar or simpler character in z . The main point is to state conditions under which it is possible, making use of the solution of the z -equation, to obtain at once a complete solution of the y -equation, taking account of "missing" solutions (annihilated by the operator $\Pi(\delta - c)$). The authors apply the above considerations to the equation

$$\prod_{r=0}^{m-1} (\delta - a - r - mN_r)y = x^m \prod_{r=0}^{m-1} (\delta + b + r + mN'_r),$$

(a, b real, arbitrary, N_r and N'_r integers ≥ 0 , or zero)

and show it is soluble in algebraic functions, possibly combined with logarithms $\log(1 - \omega x)$ ($\omega^m = 1$). The paper closes with Legendre equation $\delta(\delta - 1)y = x^2(\delta - n)(\delta + n + 1)y$ (n positive integer), as an illustration of the preceding theory.

J. Shohat (Philadelphia).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik:

Reichenbach, Hans: Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Z. 34, 568—619 (1932).

Es wird für die Wahrscheinlichkeitsrechnung (W.R.) nach Muster des Logikkalküls ein besonderer Kalkül ausgearbeitet, in den nur ein neuer Grundbegriff eingeht. Die Wahrscheinlichkeit (W.) wird aufgefaßt als eine Beziehung zwischen zwei Aussagen, die die Zugehörigkeit je eines Ereignisses zu einer Klasse behaupten (z. B. „ x ist ein Wurf“ und „das darauffolgende Auftreffereignis“ gehört der „Sechserklasse“ an“). Die W. ist daher eine Beziehung zwischen gewissen Klassen von Ereignissen. Die Sätze haben immer die Form: „Wenn x der Klasse O angehört (etwa: ein Wurf ist), so besteht die W. p dafür, daß y (das folgende Auftreffereignis) der Klasse P angehört.“ Die Ereignisse x und y müssen einander eindeutig zugeordnet sein. Der Einfachheit halber wird vorausgesetzt, daß es ihrer nur abzählbar viele gibt, d. h. daß es eine Folge $\{x_i\}$ von Ereignissen gibt, denen eindeutig die Ereignisse $\{y_i\}$ zugeordnet sind. Bei dem von Miseschen Kollektiv sind beide Folgen identisch; der Vordersatz lautet: „Wenn y_i Element des Kollektivs ist.“ Die Wahrscheinlichkeitsimplikation hat die Form: Wenn x_i der Klasse O angehört, so besteht (für alle i) die W. p dafür, daß y_i der Klasse P angehört. Dafür wird ein neues Zeichen:

$$(i)(x_i \varepsilon O \supset_p y_i \varepsilon P)$$

eingeführt unter Angabe von Regeln für Umformungen, Satzfunktionen usw. Der Sinn dieser Aussage, ebenso wie der Wahrscheinlichkeitsgrad, werden weiter nicht begründet. Ob für eine Klasse P eine Wahrscheinlichkeitsimplikation vorliegt, wird als eine Frage der Empirie betrachtet. Für die Wahrscheinlichkeitsimplikation bzw. für den Kalkül mit derselben werden formal Axiome aufgestellt, zu denen freilich noch alle Axiome des Logikkalküls hinzukommen. Die Axiome enthalten keine Festsetzungen über den Umfang der „bewerteten“ Klassen, so daß allgemein nicht einmal die Existenz einer W. für „ P_1 oder P_2 “ bzw. für „ P_1 und P_2 “ folgt, auch wenn P_1 und P_2 W. besitzen. Die eigentlichen Axiome seien hier unter Fortlassung der (allerdings wesentlichen) Symbolik des Kalküls durch Stichwörter angegeben: I. Eindeutigkeit. II. Normierung. III. Additionstheorem für sich ausschließende y -Klassen P und Q : 1. Besitzen P und Q (immer in bezug auf die x -Klasse O) die W. p bzw. q , so besitzt „ P oder Q “ die W. $p + q$. 2. Umkehrung: Aus der Existenz einer W. für P und „ P oder Q “ folgt die Existenz einer W. für Q . IV. Multiplikationstheorem: 1. Es besitze P die W. p in bezug auf O , und Q die W. u in bezug auf die Teilklasse von O , deren zugehörige y_i der Klasse P angehören; dann besitzen die P und Q gemeinsamen y_i („ P und Q “) in bezug auf O die W. $p \cdot u$. Hierzu die Umkehrungen 2. und 3.: Aus der Existenz der letztgenannten und einer der erstgenannten W. folgt die Existenz auch der anderen. Das Multiplikationstheorem ist allgemeiner als die übliche Fassung, die bloß einen Spezialfall darstellt. Aus diesen Axiomen werden mit Hilfe des Logikkalküls einige elementare Sätze abgeleitet; so vor allem die Zahlenwerte der in den Umkehraxiomen geforderten Wahrscheinlichkeiten, die Größe der W. für „ P oder Q “ (falls sie existiert!), die sog. Bayessche Regel usw. — Wichtig ist die Deutung des Axiomensystems durch Häufigkeiten. Man betrachte zu dem Zweck irgendein bestimmtes Paar einander zugeordneter Folgen von Ereignissen $\{x_i\}$ und $\{y_i\}$ und verstehe unter $H_n(O, P)$ die Anzahl der Indizes $i \leq n$, für die x_i der Klasse O und y_i der Klasse P angehört, dividiert durch die Anzahl der Indizes $i \leq n$, für die x_i O angehört. Unter der genannten Wahrscheinlichkeitsimplikation soll dann die Aussage verstanden werden, daß $H_n(O, P)$ für $n \rightarrow \infty$ dem Grenzwert p zustrebt. Dabei wurde von den Ereignisfolgen nichts weiter vorausgesetzt, und alle Axiome werden Tautologien. Freilich ist damit noch nichts über die Menge der Folgen, die dieselben klassen- und zahlenmäßig gleich bewerten, gesagt. Bei der Häufigkeitsdeutung ist es zweckmäßig, Aussagen nur in bezug auf eine Klasse O zu machen, der alle x_i angehören: damit kommt man auf die übliche Betrachtung der einzigen Ereignisfolge $\{y_i\}$. In der Praxis der W.R. werden nun nur Folgen eines bestimmten Typs behandelt, und es ergibt sich die Aufgabe, diese Folgen durch zusätzliche Forderungen zu charakterisieren. Zu dem Zweck hat von Mises die Forderung der „Regellosigkeit“ aufgestellt, jedoch findet Verf., daß dieses Prinzip mathematisch keine erlaubte Begriffsbildung sei und für physikalische Wahrscheinlichkeitsfolgen nicht zutrifft. Er beschränkt sich daher auf Auswahlen eines viel engeren Typs, indem er bloß fordert, daß bei jeder Spaltung in arithmetische Teilfolgen unabhängige Folgen gleicher W. entstehen. Diese Forderung ist gleichwertig mit der Geltung des Multiplikationstheorems in üblicher Fassung. Es werden auch gewisse Klassen von Folgen besonderer Art definiert, indem abzählbar viele Folgen in eine Matrix angeordnet und an die Häufigkeits-

verteilung in den Spalten und Zeilen geeignete Forderungen gestellt werden. — Beim Anwendungsproblem tritt natürlich die Häufigkeitsdeutung — angewandt auf „naturgegebene Folgen“ — in den Vordergrund. Individuelle Wahrscheinlichkeitsaussagen haben keinen Sinn. Die x_i sind in praxi durch eine Vorschrift gegeben, die y_i aber werden durch die Natur geliefert. Daher entsteht das „Sinnproblem“ für alle Konvergenzaussagen, die ja nicht „entscheidbar“ sind. Verf. glaubt das Problem durch eine allgemeine „Wahrscheinlichkeitslogik“ zu lösen, in der alle Aussagen nicht als wahr oder falsch, sondern nur als wahrscheinlich entscheidbar sind. Im übrigen liegt nach Auffassung des Verf. der Anwendung der Häufigkeitsdeutung auf Naturfolgen nur eine Grundannahme über diese zugrunde: daß man aus der Tatsache, daß man in einer beliebig verlängerbaren Versuchsreihe „fast alle“ Häufigkeiten zwischen zwei Schranken s_1 und s_2 gefunden hat, mit einer W. w schließen darf, daß die Häufigkeiten einem Grenzwert zwischen s_1 und s_2 zustreben; und daß w gegen 1 wächst, wenn die Versuchsreihe über alle Grenzen verlängert wird. Willy Feller (Kiel).

Rajchman, Al.: Das starke Gesetz der großen Zahlen. *Mathesis Polska* 6, 145 bis 161 (1931) [Polnisch].

Im Rahmen einer in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 3, 17) begonnenen systematischen Darstellung der „Gesetze der großen Zahlen“ wird der folgende Satz über Orthogonalreihen bewiesen: $\{\varphi_n(x)\}$ sei ein im Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ definiertes

System normierter Orthogonalfunktionen, d. h. $\int_0^1 \varphi_\mu(x) \varphi_\nu(x) dx = 0$ für $\mu \neq \nu$, $\int_0^1 \varphi_\mu^2(x) dx = 1$ und $\{C_n\}$ eine Zahlenfolge mit $|C_n| \leq 1$; dann gilt

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\kappa=1}^n C_\kappa \varphi_\kappa(x) = 0$ fast überall in $\langle 0, 1 \rangle$. Aus diesem Satz ergibt sich als Spezialfall die folgende Formulierung des „starken Gesetzes der großen Zahlen“: Ist

$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit den Erwartungswerten $E(y_n) = 0$ und den Streuungen $E(y_n^2) = C_n^2 \leq 1$, wird ferner mit $W(n_1, n_2, \varepsilon)$ die Wahrschein-

lichkeit bezeichnet, daß gleichzeitig $\left| \frac{1}{\nu} \sum_{\kappa=1}^{\nu} y_\kappa \right| < \varepsilon$ für $\nu = n_1, n_1 + 1, \dots, n_2$, so

ist $\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \lim_{n_2 \rightarrow \infty} W(n_1, n_2, \varepsilon) = 1$ für beliebiges $\varepsilon > 0$. Birnbaum (Wien).

Craig, Cecil C.: On the composition of dependent elementary errors. *Ann. of Math.*, II. s. 33, 184–206 (1932).

An eine Reihe grundlegender Untersuchungen von H. Cramér anknüpfend, betrachtet Verf. die Summen einer großen Anzahl von Elementarfehlern, welche (das ist hier das Neue) in gewissem Maß gegenseitig abhängig sein dürfen. Das angestrebte Ziel reicht über die Abschätzung des Restglieds der Gauß-Laplaceschen Grenzformel weit hinaus, indem nach der Güte der Darstellung mittels einer endlichen Charlierreihe mit vorgegebener Gliederzahl gefragt wird. Die Methode ist diejenige der charakteristischen Funktionen und folgt in allen Einzelheiten der Cramérschen Beweisanordnung, was Verf. ausdrücklich betont. Zunächst wird vorausgesetzt, daß alle n Elementarfehler dasselbe Verteilungsgesetz haben und daß dieses Gesetz endliche absolute Momente β_r bis zu einer gewissen Ordnung $k \geq 3$ einschließlich besitzt. Die gegenseitige Abhängigkeit wird in dem Sinne eingeschränkt, daß die bedingten Momente und absoluten Momente r -ter Ordnung ($r = 2, 3, \dots, k$) der i -ten Variablen ($i = 2, 3, \dots, n$) für verschiedene Werte der $i - 1$ vorangehenden Variablen nur Schwankungen zulassen sollen, die unterhalb einer von r allein abhängigen positiven Grenze c_r bleiben, wobei noch $\sqrt[3]{c_r/\beta_r}$ kleiner als eine angegebene Funktion von n verbleibt. Ist dann $F_n(x)$ die zentrierte und normierte Integralverteilungsfunktion der betrachteten Summe und sind noch gewisse wenig einschränkende Bedingungen der „Glattheit“ für die Elementargesetze erfüllt, so gilt als Hauptergebnis die Formel

$$F_n(x) = \Phi(x) + \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{a_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(x) + An^{-\kappa/2}. \quad (k \geq 3, n > 1, x \text{ beliebig})$$

Hierin bedeutet

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt, \quad a_\nu = (-1)^\nu \int_{-\infty}^{+\infty} H_\nu(x) dF_n(x)$$

($H_\nu(x)$ sind die Hermiteschen Polynome), Δ eine Größe, die absolut unterhalb einer nur von k und dem gegebenen Elementargesetz abhängigen positiven Konstanten verbleibt, und $\kappa = \left[\frac{k+2}{3} \right]$. Unter gewissen weiteren Voraussetzungen wird auch eine ähnliche Formel für die evtl. vorhandene Wahrscheinlichkeitsdichte abgeleitet.

A. Khintchine (Moskau).

Pearson, Egon S.: The analysis of variance in cases of non-normal variation. *Biometrika* (London) 23, 114–133 (1931).

The problem considered in this paper is illustrated by data published by W. A. Shewhart, (vgl. dies. Zbl. 1, 400). The data arise from 200 tests for insulation resistance made upon a certain material which was under examination in the Bell Telephone Laboratories. The problem is to determine whether the construction and testing of the material were remaining uniformly under control or were varying from day to day more than would be expected through chance, the observations having been broken up into subsets. — The problem is approached both by testing the significance of the correlation ratio of resistance on a group number, and by R. A. Fisher's procedure in the analysis of variance. Next, the validity of the assumptions involved in the tests are examined. These assumptions relate to equal variance of the universes from which drawings were made, and to the normality or non-normality of the populations from which drawings are made. The divergence from normality is clearly significant. It is the main object of the present paper to examine the effect of non-normality. This is accomplished by considering the question as to how far the law of distribution of the correlation ratio squares obtained from a normal parent distribution still represents the distribution of the correlation ratio squared calculated from the non-normal data. The problem is dealt with largely by experimental sampling. The results suggest an answer to the question: If the sampled population is not normal, is it an unwarranted refinement to use the probability integral of Student's curve when dealing with small samples? The conclusions drawn are that there is no clearly marked systematic discrepancy. Such differences as can be picked out between the fits with Student's curve and those of a normal curve are slightly in favor of the former in the case of the smallest samples. But there is practically no difference if the number in each of two samples used in the comparison exceeds 10. *H. L. Rietz* (Iowa).

Haldane, J. B. S.: A note on inverse probability. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 28, 55–61 (1932).

Es seien von einer statistischen Gesamtheit n Objekte beobachtet und für a dieser Objekte der Charakter X festgestellt. Das Bayessche Problem ist bekanntlich, auf Grund dieser Tatsache die Wahrscheinlichkeit $p(x) dx$ zu ermitteln, daß dem Charakter X in der betrachteten Gesamtheit eine zwischen x und $x + dx$ gelegene Grundwahrscheinlichkeit zukommt. Die Bayessche Lösung dieses Problems beruht auf der Annahme, daß alle Werte von x zwischen 0 und 1 von vornherein als gleich wahrscheinlich angesehen werden können. Nimmt man jedoch statt der Gleichwahrscheinlichkeit für x eine von vornherein bekannte Verteilung $f(x)$ an, so gelangt man zu einer allgemeineren Lösung, gegeben durch die Formel

$$p(x) = Cx^a(1-x)^{n-a}f(x)$$

mit

$$C = 1 : \int_0^1 x^a(1-x)^{n-a}f(x) dx.$$

Der Verf. bestimmt nun in der vorliegenden Note unter verschiedenen durch die Erfahrung nahegelegten Voraussetzungen über $f(x)$ bei großen Werten von n asymptotische Formeln für $p(x)$.

Lüneburg (Göttingen).

Kolmogorov, A.: Sur le problème d'attente. Mat. Sborn. (Moskva) **39**, H. 3/4, 101—106 (1931).

Die allgemeinen Resultate, die der Verf. in seiner Arbeit „Über die analytischen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (vgl. dies. Zbl. **1**, 149) erhalten hat, werden angewandt auf das Problem der wahrscheinlichen Wartezeit vor öffentlichen Schaltern, welches zuerst von Pollatschek gestellt und behandelt worden ist. Vorausgesetzt wird: Im Zeitintervall $t, t + dt$ sei 1. die Wahrscheinlichkeit für die Neuankunft einer Person gleich $\alpha(t) dt$; 2. die Wahrscheinlichkeit für die Neuankunft von mehr als einer Person in dt klein von höherer als 1. Ordnung; 3. die Wahrscheinlichkeit für die Beendigung eines Schaltergesprächs gleich βdt . Für die Wahrscheinlichkeit $Q_i(t)$, daß zur Zeit t i Personen vor den Schaltern anwesend sind, ergibt sich sodann ein unendliches System von linearen Differentialgleichungen. Im Fall $\alpha = \text{const}$ kann dieses explizit gelöst werden; mit wachsendem t konvergieren die Funktionen $Q_i(t)$, unabhängig von der Anfangswahrscheinlichkeit, gegen konstante Werte, deren Gesamtheit die stationäre Lösung des Problems darstellt. Lüneburg (Göttingen).

Kolmogorov, A.: Eine Verallgemeinerung des Laplace-Liapounoffschen Satzes. Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Otdél. mat. i estest. Nauk, VII. s. Nr **7**, 959—962 (1931).

In der Note wird die folgende Verallgemeinerung des Liapounoffschen Satzes aufgestellt. Es seien x_1, \dots, x_n voneinander unabhängige zufällige Größen mit den Erwartungswerten $E(x_n) = 0$, $E(x_n^2) = 2b_n$, $E(|x_n^3|) = d_n$; ferner $a(t)$ und $b(t) > a(t)$ zwei stetig differenzierbare Funktionen mit $a(0) < 0 < b(0)$. Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit $P_n(x, y)$, daß für die Summen $x_1 + \dots + x_k = s_k$ die Ungleichungen $a(t_k) < s_k < b(t_k)$, ($t_k = b_1 + \dots + b_k$, $k = 1, \dots, n-1$), $x < s_n < y$ erfüllt sind. Ist $d_k/b_k \leq \mu$ und $g(s, t)$ die zu den Punkten $0, 0$ und s, t gehörige Greensche Funktion der Wärmeleitungsgleichung $f_t = f_{ss}$, gebildet für das Gebiet $0 < t, a(t) < s < b(t)$ der s, t -Ebene, so ist

$$P_n(x, y) = \int_x^y g(s, t_n) ds + \theta R(t_n, \mu),$$

wobei $R(t, \mu)$ gleichmäßig in $t \geq T > 0$ mit μ gegen Null strebt. Der Liapounoffsche Satz besteht bekanntlich in einer ähnlichen asymptotischen Relation für die Wahrscheinlichkeit $P(a < s_n < b)$ dafür, daß s_n zwischen a und b liegt; hier ist $g(s, t)$ speziell die Funktion $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-s^2/4t}$. Lüneburg (Göttingen).

Lurquin, Constant: Sur les fonctions génératrices de Laplace. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 342—344 (1932).

Die Momente einer zufälligen Variablen werden im Fall eines endlichen Wertevorrats durch die Laplacesche erzeugende Funktion ausgedrückt, was einen einfachen Beweis für die Additionssätze der Mittelwerte und Streuungen unabhängiger zufälliger Variablen liefert. A. Khintchine (Moskau).

Fisher, R. A., and J. Wishart: The derivation of the pattern formulae of two-way partitions from those of simpler patterns. Proc. London Math. Soc., II. s. **33**, 195 bis 208 (1931).

Die Arbeit ist eine Ergänzung zu einer früheren Arbeit [R. A. Fisher, Moments and product moments of sampling distributions. Proc. London Math. Soc. (2) **30**], in der das folgende Problem behandelt wird. Es sei

$$M(t) = \int e^{tx} df(x)$$

die Momentfunktion einer Verteilung $f(x)$ und

$$K(t) = \log M = \sum_r \frac{x_r}{r!} t^r.$$

Aus den Größen $s_r = \sum_{\nu=1}^n x_\nu^r$, entstanden aus n Ergebnissen x_1, \dots, x_n einer zu $f(x)$ gehörigen Versuchsreihe, werden gewisse rationale Funktionen k_r gebildet, deren

Koeffizienten von n abhängen und deren erste Momente, bezogen auf die ihnen zukommenden Verteilungsfunktionen $f_r(x)$ gerade die Werte κ_r besitzen. Man kann die Funktionen $f_r(x)$ sowie auch die Verteilungsfunktionen für das gleichzeitige Auftreten verschiedener Werte k_r wie oben kennzeichnen durch Funktionen

$$K(t_1, t_2, \dots) = \sum \kappa(p_1^{\pi_1}, p_2^{\pi_2}, \dots, p_h^{\pi_h}) \frac{t_1^{\pi_1} t_2^{\pi_2} \dots t_h^{\pi_h}}{\pi_1! \pi_2! \dots \pi_h!},$$

wobei die Faktoren $\kappa(p_1^{\pi_1}, p_2^{\pi_2}, \dots, p_h^{\pi_h})$ rationale Funktionen der Größen κ_r sind, deren Koeffizienten selbst rational von n abhängen. Die Bestimmung dieser Koeffizienten kann auf kombinatorischem Wege durch Betrachtung gewisser Zahlenmuster geschehen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, rekursive Methoden zur Berechnung dieser Koeffizienten zu entwickeln.

Lüneburg (Göttingen).

Frish, Ragnar, and Bruce D. Mudgett: Statistical correlation and the theory of cluster types. J. Amer. Statist. Assoc., N. s. 26, 375—392 (1931).

Consider a statistical population composed of N observations each characterized by n variable attributes, x_1, x_2, \dots, x_n . The number of attributes is called the dimensionality of the observations. The paper discusses the types of systematic variation that may occur with special reference to such questions as the following: What is the degree of freedom of the system? What variables can be considered independent? For simplicity, the case of three variables is first considered and only linear relations among the variables are considered in any case. The scatter diagram of points (x_1, x_2, x_3) may exhibit anyone of four cluster types. Each of these four cluster types is analysed geometrically into subtypes. Then the algebraic interpretation of different cluster types of three variables is presented. Next, the algebraic interpretation of cluster types in n variables is discussed. As statistical criteria for the several types of clustering there is introduced the coefficient of collective alienation and its correlative — the coefficient of collective correlation. The coefficient s of collective alienation in the set (x_1, x_2, \dots, x_n) is defined by $s = \sqrt{R}$ where R is the well known determinant of the simple correlation coefficients r_{ij} for pairs of the variables x_1, x_2, \dots, x_n and the coefficient r of the collective correlation is defined by $r = \sqrt{1 - R}$. These coefficients satisfy the conditions $0 \leq s \leq 1, 0 \leq r \leq 1$. The following property of the collective alienation coefficient makes it a useful tool in studying cluster types: The collective alienation coefficient is equal to zero when, and only when, there exists an exact linear dependency in the set for which the collective alienation coefficient is computed and furthermore this coefficient increases as the swarm of scatter points takes on a shape that deviates more and more from the shape where linear dependency exists. — The population from which the sample of n points (x_1, x_2, x_3) is drawn is said to be simply collinear when a plane $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ represents the systematic variations while the deviations from the plane represent accidental variations. If each regression coefficient is different in the regression equation, the set is called a closed set. Of all the possible cluster types considered, there is only one particular type in which all the correlation and regression parameters have meaning, namely, the case of a set which is not only collinear but also closed.

H. L. Rietz (Iowa).

Pearson, Karl: Some properties of „Student's“ z : Correlation, regression and sec-dasticity of z with the mean and standard deviation of the sample. Biometrika (London) 23, 1—9 (1931).

Let \bar{x} be the mean and σ the standard deviation in a sample, while m is the population mean. Then Student's $z = (\bar{x} - m)/\sigma$. In dealing with normal parent distributions, the first striking result is that the correlation between \bar{x} and z is extremely close. The next result is that the regression of z on \bar{x} is linear and the equation is found. The distribution of arrays of z 's is not homoscedastic but is given by two sloping lines. The frequency surface of z and \bar{x} is found. From this surface the distribution curve of z for an assigned \bar{x} is found. The first four moments of this curve are found. Herein occurs occasionally the case in which β_2 is infinite. Although the case is not at all likely to arise in practical statistics, when we proceed to deduce other distributions from the results, we may find ourselves landed in contradictions. The conclusion is reached that the z test may not be so efficient even for small samples as some have held.

H. L. Rietz (Iowa).

Andreoli, Giulio: Sulla distribuzione dei redditi. Note Esercit. mat. 6, 11 bis 15 (1931).

Geometrie.

Sz. Nagy, Julius v.: Über die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex. Math. Z. **35**, 80—92 (1932).

Die hier betrachteten „Kurven“ sind Summen aus endlich vielen „Zügen“, d. h. aus ebenen eindeutigen, stetigen Kreisbildern, welche ihrerseits Summen aus endlich vielen Konvexbogen sind (keine Strecken als Teilbogen enthalten) und überall stetige Tangenten besitzen. Unter der „Klasse“ bzw. dem „Klassenindex“ versteht man die größte bzw. kleinste Zahl von Tangenten der Kurve, welche durch einen Punkt der Ebene gehen, während „Ordnung“ bzw. „Index“ die größte bzw. kleinste Zahl von auf einer Geraden gelegenen Kurvenpunkten bezeichnet. Eine Kurve von der Klasse n heißt vom „Maximalindex“, abgekürzt „MKI-Kurve“, wenn ihr Klassenindex $n - 2$ ist. Es handelt sich um die Bestimmung der Ordnungen, welche die MKI-Kurven besitzen können. Und zwar werden in vorliegender Arbeit A. die größtmöglichen Ordnungen (Maximalordnungen) zunächst für die MKI-Kurven der Klasse n bestimmt, 1. deren Züge sämtlich vom Index 0 sind oder 2. von deren Zügen einer vom Index 2, die übrigen vom Index 0 sind oder 3. deren Ordnung ungerade ist. B. Ferner werden für allgemeinere Fälle von MKI-Kurven die Minimalordnungen bestimmt. — Zu A. Es wird gezeigt, daß in den genannten drei Fällen die Maximalordnung gleich $n + r - w = 2n - 2 + 2p - w = n(n - 1) - 2t - 3w$ ist, wobei r bzw. w bzw. t die Anzahl der Spitzen bzw. der Wendetangenten bzw. der Doppeltangenten unserer Kurve bezeichnen und p das Geschlecht (vgl. unten) [übrigens ist $w \leq 1$]. In den einzelnen Fällen werden noch zahlreiche Verschärfungen dieses allgemeinen Satzes gewonnen, so z. B. die, daß für einzügige MKI-Kurven sämtliche Ordnungen m mit $6 \leq m \leq 2n - 2$ möglich sind. — Zu B. Es gelten u. a. die Sätze: Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ existieren MKI-Kurven der Klasse $2k$, welche die Ordnung 4 besitzen. Für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ existieren einzügige MKI-Kurven der Klasse n , welche die Ordnung 6 besitzen (sowie das Geschlecht Null oder Eins). Die Ordnung einer MKI-Kurve n -ter Klasse, deren Züge nicht sämtlich Ovale sind, ist mindestens $6 - w$, unter w die Anzahl der Wendetangenten verstanden ($0 \leq w \leq 1$). — Das „Geschlecht p “ ist so definiert: $p = p_1 + \dots + p_k - k + 1$; dabei ist k die Anzahl der Komponenten derjenigen (offenen) Punktmenge, durch deren Punkte $n - 2$ verschiedene Tangenten an die Kurve gehen und $p_k + 1$ ist der Zusammenhangsgrad der k -ten Komponente. Haupt (Erlangen).

Kaufmann, Boris: Über Stützstreckenverteilung und Zerlegung konvexer Figuren in konvexe Teilfiguren ohne geradlinige Begrenzungssteile. J. f. Math. **166**, 151—166 (1932).

Verf. hat in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **1**, 173) die Verteilung der Stützstrecken auf ebenen Jordan-Kurven untersucht; in der vorliegenden Arbeit unternimmt er Entsprechendes für die Begrenzung eines beliebigen ebenen Bereiches. (Bezüglich der im folgenden verwendeten Begriffe „Stützstrecke“ usw. sei auf die oben genannte Besprechung verwiesen.) Zunächst (§ 1) werden vier Kriterien für die Existenz einer (inneren oder äußeren) Stützstrecke relativ zu einer Umgebung eines gegebenen Begrenzungspunktes entwickelt, welche unter sehr allgemeinen Annahmen über die Umgebung des betrachteten Randpunktes anwendbar sind. Sehr bemerkenswerterweise liefern (§ 3) diese Kriterien nun nicht nur hinreichende, sondern sogar notwendige Bedingungen dafür, daß eine Begrenzung Stützstrecken relativ zu einer Umgebung besitzt; d. h.: Jede Begrenzung, bei welcher für jeden Punkt jedes der Kriterien versagt, besitzt keine Stützstrecken (relativ zu einer Umgebung). Diese Begrenzungen, vom Verf. als „Gratrandmengen“ bezeichnet, lassen sich nun im wesentlichen auch so charakterisieren: Die Berandung S eines ebenen Bereiches B ohne Stützstrecken innerhalb einer konvexen Figur F zerlegt F in konvexe Teilfiguren, deren Begrenzungen die Peripherie von F treffen und innerhalb F nirgends geradlinig sind (falls mindestens ein Punkt von S innerhalb F

liegt). (Das Auftreten konvexer Figuren bei den Gratrandsmengen ist bereits motiviert durch den Satz, daß nichtkonvexe Bereiche mindestens eine Konkavitätsstelle besitzen.) Die Existenz von Gratrandsmengen ergibt sich nunmehr aus dem Nachweis der Möglichkeit bzw. aus der Konstruktion der geforderten Zerlegung (§ 4). — Neben diesem allgemeinen, abschließenden Resultat ergeben sich noch eine Reihe spezieller Sätze. Beispielshalber seien genannt: Die Stützstrecken liegen überall dicht: a) auf beliebigen geschlossenen (Schönflies-) Kurven, b) falls die Begrenzung des Bereiches keine geradlinigen Stücke enthält, c) falls sämtliche Begrenzungspunkte erreichbar sind. Ferner: auf einer geschlossenen Kurve ohne geradlinige Kurvenstücke oder ohne „freie“ Konkavbogen liegen die Konkavitäts- und Konvexitätsstellen gleichzeitig überall dicht. — Verf. erörtert am Schlusse mögliche Verallgemeinerungen des Zerlegungsproblems für den Fall des n -dimensionalen Raumes. *Haupt* (Erlangen).

Weiss, E. A.: Der Hyperkreis und sein Laguerresches Bild. *J. f. Math.* **166**, 193 bis 200 (1932).

Ein Hyperkegelschnitt in der komplexen proj. Ebene ist nach C. Segre der Ort aller Nullstellen einer indefiniten Hermiteschen Form $\sum a_{ik} x_i \bar{x}_k$. Ordnet man nun nach Laguerre jedem komplexen Punkt P der euklid. Ebene einen reellen „Pfeil“, nämlich das geordnete Paar der reellen Punkte P', P'' der Isotropen durch P zu, so wird der Hyperkegelschnitt durch ein System von ∞^3 Pfeilen, also durch eine Verwandtschaft dargestellt, welche jedem Punkt P' eine Kurve von Punkten P'' zuordnet. Ist diese Kurve eine Gerade, also die Verwandtschaft eine Korrelation, so heißt der Hyperkegelschnitt ein Hyperkreis. Eine Korrelation ist dann und nur dann Bild eines Hyperkreises, wenn sie aus der uneigentlichen Geraden eine Involution ausschneidet, der das isotrope Punktepaar angehört. Die reellen Punkte des Hyperkreises bilden eine gleichzeitige Hyperbel: die Inzidenzkurve der Bildkorrelation. Ist der Hyperkreis reell, so ist die Bildkorrelation involutorisch. Andernfalls schneidet sie nur auf den Geraden eines einzigen Parallelbüschels Involutionen aus. Der Pol der uneigentlichen Geraden heißt Mittelpunkt des Hyperkreises. Ihm entspricht der „Mittelpfeil“, der vom Mittelpunkt der Hyperbel halbiert wird und dessen Richtung zur Involutionsrichtung konjugiert ist. Aus der Inzidenzhyperbel und dem Mittelpfeil läßt sich die Korrelation leicht konstruieren: sie bestimmen also den Hyperkreis. — Die Schnittpunkte des Hyperkreises mit einer reellen Geraden werden ausführlich diskutiert. Ein Hyperkreis kann auf ∞^1 Weisen als Ort der Punkte beschrieben werden, für welche die Differenz der Quadratbeträge der Abstände von zwei festen Geraden mit reellen Richtungen konstant ist. Diese Geraden gehen durch den Hyperkreismittelpunkt und ihre Richtungen sind konjugiert bez. der Inzidenzhyperbel. *van der Waerden*.

Kubota, Tadahiko: Über besondere Lagen zweier Tetraeder. II. *Sci. Rep. Tôhoku Univ., Math. ecc.*, I. s. **20**, 726—730 (1931).

Neuer Beweis des Satzes *Zbl.* **2**, 284 (1931) unabhängig von dem F. Schurschen Satze: „Wenn die Verbindungslinien entsprechender Ecken zweier zugeordneter Tetraeder nur eine gemeinsame Treffgerade zulassen, so auch die Schnittgeraden entsprechender Ebenen“, der umgekehrt gefolgert wird. *E. A. Weiss* (Bonn).

Room, T. G.: Notes on some geometrical configurations. X: A property of Grassmannian manifolds. *J. London Math. Soc.* **7**, 4—6 (1932).

So wie der Satz von der Existenz einer Doppelsechse im R_3 den Satz von der Existenz eines der Plückerschen M_4^2 im R_5 gleichzeitig ein- und umbeschriebenen Simplex nach sich zieht, so führt die Abbildung eines vom Verf. gefundenen, aus je $\binom{n+1}{m+1}$ Räumen R_m und R_{n-m-1} des R_n bestehenden Analogons zur Doppelsechsefigur [*Proc. Roy. Soc. (A)* **111**, 388 (1926)] zu dem Satze: Der Grassmannschen Mannigfaltigkeit, deren Punkte die Unterräume R_m eines R_n darstellen, können Simplexe gleichzeitig ein- und umbeschrieben werden. Beispiel. (IX. vgl. dies. *Zbl.* **3**, 130.)

E. A. Weiss (Bonn).

Seel, Fritz: Klassifikation und Darstellung der reellen räumlichen Kollineationen mit invarianter nicht-ausgearteter Fläche zweiten Grades. S.-B. physik.-med. Soz. Erlangen 62, 167—258 (1931).

Vgl. dies. Zbl. 1, 158.

Todd, J. A.: On questions of reality for certain geometrical loci. Proc. London Math. Soc., II. s. 32, 449—487 (1931).

Klassifikation der reellen Büschel quadratischer Mannigfaltigkeiten M_{n-1}^2 im R_n mit $n + 1$ verschiedenen Kegeln: Der reelle Büschelparameter wird als Punkt auf einer Bildgeraden gedeutet. Dabei werden die Parameterwerte ausgezeichnet, die Kegeln des Büschels entsprechen. Da sich der Realitätscharakter einer M_{n-1}^2 im allgemeinen ändert, wenn der Büschelparameter einen solchen ausgezeichneten Wert überschreitet, geben die entsprechenden Punkte eine Einteilung der Geraden in Strecken, die M_{n-1}^2 mit bestimmten Realitätsverhältnissen entsprechen. Mit Hilfe solcher Schemata werden zunächst im R_4 7 Familien reeller M_3^2 -Büschel unterschieden (Normalformen) und auf die Realität der Geraden und Kegelschnitte ihrer Basis- M_2^4 hin untersucht. Durch Projektion der M_2^4 von einem ihrer Punkte aus auf einen R_3 werden dann die 5 Schläflischen Typen reeller Flächen 3. Ordnung gewonnen (Normalformen), und es wird die bereits von F. Klein beantwortete Frage nach den Geraden der F^3 , die das Oval eines zweiteiligen ebenen Schnittes der Fläche treffen, neu behandelt. Es folgt die Klassifikation der reellen allgemeinen M_3^2 -Büschel im R_5 (8 Familien) und die der speziellen Büschel, deren Basis- M_3^4 Bild eines tetraedralen Komplexes ist (8 Familien). Durch Projektion dieser M_3^4 von einem ihrer Punkte aus auf einen R_4 entsteht die Segresche M_3^3 mit 10 Doppelpunkten. Auf Grund der für die M_3^4 gewonnenen Resultate wird diese Segresche M_3^3 und ihr von einem ihrer Punkte aus gesehener scheinbarer Umriß (Kummersche Fläche) auf ihre Realitätsverhältnisse hin untersucht. Der Schluß ist der Klassifikation des allgemeinen reellen M_{n-1}^2 -Büschels im R_n gewidmet und zeigt Berührungspunkte mit einer Abhandlung von E. G. Togliatti [Annali di Mat., III. s. 30 (1921)]. Insbesondere wird ein Algorithmus entwickelt, der es gestattet, die verschiedenen, mit Bezug auf die Realität der linearen Räume auf der Basismannigfaltigkeit des Büschels möglichen Fälle aufzufinden. E. A. Weiss (Bonn).

Welchman, W. G.: Some enumerative results for curves. Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 18—22 (1932).

Dieselbe Methode, die der Verf. bei anderer Gelegenheit schon angewendet hat (dies. Zbl. 1, 163—164), d. h. die Abbildung der Flächen 2. Ordnung mit den Punkten eines Raumes S_9 , führt sehr leicht, durch Anwendung einer Formel von Schubert, zur Bestimmung der Anzahl der Raumkurven 3. Ordnung, die durch p gegebene Punkte hindurchgehen und $6 - p$ gegebene Geraden je zweimal treffen. Ähnliche Abbildungen der Hyperflächen 2. Ordnung eines vierdimensionalen Raumes führen zur Bestimmung: 1. der Anzahl der rationalen Normalkurven C^4 , die durch $p > 1$ gegebene Punkte hindurchgehen und $7 - p$ gegebene Ebenen je dreimal treffen (Anzahlen die schon von F. P. White bestimmt worden waren); 2. der Anzahl der rationalen Normalkurven C^4 , die drei gegebene Geraden je zweimal treffen, durch p gegebene Punkte hindurchgehen und $3 - p$ gegebene Ebenen je dreimal treffen; 3. der Anzahl der Kurven C^8 des Raumes S_4 , Durchschnitt von drei Hyperflächen 2. Ordnung, die durch p gegebene Punkte hindurchgehen und q gegebene Geraden je zweimal treffen ($3p + 4q = 36$). Alle diese Anzahlbestimmungen werden so zu Anwendungen einer bekannten Formel von G. Z. Giambelli [Mem. Acc. Torino (2) 52, 171 (1902)] zurückgeführt.

E. G. Togliatti (Genova).

Taylor, Mildred E.: A determination of the types of planar Cremona transformations with not more than 9 F -points. Amer. J. Math. 54, 123—128 (1932).

The infinite types of planar Cremona transformations with not more than 9 F -points are classified into seven types, according to the algebraic expression, given explicitly, of the integers n, r_i, s_j, α_{ji} attached to the transformation. This classi-

fication is derived from the composition of the linear group $g_{6,2}$, associated with these transformations and studied by Coble. O. Zariski (Baltimore).

Vaidyanathaswamy, R.: On the rational norm curve. II. J. London Math. Soc. 7, 52—57 (1932).

This paper is concerned with inscribed simplexes of a rational norm curve C_n in space S_n . Any such simplex is given by a form $a_0 x^{n+1} + a_1 x^n + \dots + a_{n+1}$, the roots of which are the parameter-values of the vertices. Any set of simplexes are called linearly dependent, if their forms are linearly dependent. The simplexes in C_n , which are circumscribed to a given quadric Q , are linearly dependent on $n - 2k$ linearly independent ones; the number k is called the „type“ of Q with respect to the given C_n . A general quadric has type $\frac{1}{2}n$ or $\frac{1}{2}(n - 1)$, accordingly as n is even or odd. Any n linearly independent simplexes in C_n are circumscribed to exactly one quadric Q of type zero. van der Waerden (Leipzig).

Gambier, Bertrand: Points de contact d'une courbe algébrique et de son enveloppe. C. R. Acad. Sci. Paris 194, 578—580 (1932).

Etant donnée une famille à un paramètre de courbes algébriques planes sans points multiples, d'équation $C(x, y, \lambda) = 0$ de degré m , l'auteur pose le problème de rechercher dans quels cas le nombre des points limites distincts peut être inférieur à m^2 . Pour $m = 2$, ce nombre peut être à volonté 1, 2, 3 ou 4. Pour $m \geq 3$, il n'est plus arbitraire. En particulier, pour $m = 4$, un point limite de multiplicité 16, 15, 14 est impossible. D'une manière plus générale, on ne peut avoir deux points limites dont la somme des multiplicités est égale à 16 ou 15. Au contraire, le cas de deux points limites dont la somme des multiplicités est égale à 14, est possible. P. Dubreil.

Segre, Beniamino: Sulla completezza della serie caratteristica di un sistema continuo di curve irriducibili tracciate su di una superficie algebrica. Rend. Circ. mat. Palermo 55, 443—449 (1931).

Es sei Σ ein vollständiges kontinuierliches Kurvensystem auf einer algebraischen Fläche F ; es sei p_a das arithmetische Geschlecht von F ; und es seien ν der virtuelle Grad, π das virtuelle Geschlecht und i der Spezialitätsindex der allgemeinen Kurve C des Systems Σ . Wenn $p_a + \nu - \pi - i + 1 \geq 0$, hat F. Severi mit transzendenten Mitteln bewiesen [Rend. Acc. Lincei (5) 30, 1 (1921)], daß die charakteristische Schar von Σ eine Vollschar ist. In der vorliegenden Abhandlung von B. Segre wird der Satz zu jedem kontinuierlichen System von (im allgemeinen irreduziblen) algebraischen Kurven ausgedehnt. Der Verf. betrachtet auf F eine irreduzible algebraische Kurve C , die eine charakteristische Schar besitzt; es bedeutet das, wie bekannt, daß es, wenn C in einem Linearsystem $|E|$ partiell enthalten ist und wenn $|D|$ die Differenz $|E - C|$ bedeutet, die Differenz der Linearscharen $|EC|$ und $|DC|$ existiert; diese Differenz ist von $|E|$ unabhängig. Der Verf. beweist zunächst, daß C in einem unendlichen kontinuierlichen Kurvensystem vollständig enthalten ist; es folgt daraus, in voller Allgemeinheit, daß ein solches System die vollständige charakteristische Schar aus C ausschneidet. Der Beweis ist auf den früheren Beweis von F. Severi gestützt; es bleibt also die Frage noch offen, den Satz mit lauter algebraisch-geometrischen Mitteln zu beweisen. E. G. Togliatti (Genova).

Baker, H. F.: Note in regard to surfaces in space of four dimensions, in particular rational surfaces. Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 62—82 (1932).

Zusammenfassende Darstellung verschiedener Formeln, die eine allgemeine algebraische Fläche eines vierdimensionalen Raumes betreffen. Es werden als fundamentale Charaktere der Fläche folgende gewählt: die Ordnung, das Geschlecht der Schnittkurven mit den Hyperebenen des Raumes, die Zeuthen-Segresche Invariante I , das arithmetische Geschlecht p_a . Mit diesen kann man verschiedene andere Charaktere der Fläche ausdrücken; wie z. B.: die Anzahl der uneigentlichen Doppelpunkte; die Anzahl der dreifachen Sekanten durch einen Punkt allgemeiner Lage; das Geschlecht der Doppelkurve der auf einem S_3 projizierten Fläche und das Geschlecht der „Sehnen-

kurve“ γ der ursprünglichen Fläche, die, doppeltprojiziert, jene Doppelkurve liefert, sowie die Charaktere des projizierenden Kegels. Es werden dann, sowohl für eine allgemeine Fläche als auch für eine Regelfläche, die Charaktere des Trisekantenkegels aus einem beliebigen Punkte O der Fläche bestimmt, insbesondere das Geschlecht der „Trisekantenkurve“ δ , die, durch Doppelprojektion aus O , jenen Kegel liefert. Im Falle einer rationalen Fläche kann man leicht die ebene Abbildung der Kurven γ, δ finden. Zahlreiche Beispiele an bekannten Flächen erläutern die ganze Darstellung, die aus einer 1929 gehaltenen Vorlesung entstanden ist. *E. G. Togliatti* (Genova).

Anglade, E.: Ligne de striction et paramètre de distribution. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 23, 263—285 (1931).

Einfachste Formeln für Regelflächen, die durch Striktionslinie und Erzeugendenrichtungen gegeben sind. Spezialisierung der Formeln für Flächenklassen mit besonderen Eigenschaften. Z. B. Flächen, deren Striktionslinie konstante Windung hat oder kreisförmig ist, Flächen mit konstantem Drall (Verteilungsparameter) usw. Ferner Formeln für Verbiegungen von Regelflächen, bei denen die Erzeugenden geradlinig bleiben.

W. Fenchel (Göttingen).

Haack, Wolfgang: Affine Differentialgeometrie der parabolischen Strahlensysteme. Spezielle Flächen. Math. Z. 35, 66—79 (1932).

Die Arbeit schließt sich einer früheren Abhandlung des Verf. an (vgl. dies. Zbl. 1, 31). Die dort eingeführten affinen Fundamentalinvarianten \mathfrak{B}, Q, \bar{Q} einer allgemeinen, nicht geradlinigen Fläche werden hier besonderen Bedingungen unterworfen und die entsprechenden Flächen bezüglich ihrer geometrischen Eigenschaften untersucht. 1. $\mathfrak{B}, Q, \bar{Q} = \text{konst.}$ Es gibt zwei Klassen von solchen Flächen. Die eine enthält gerade die (bekannten) von der Fläche $z(x^2 + y^2) = 1$ nicht wesentlich verschiedenen Flächen. Die Flächen der anderen sind Schiebflächen. Ihre Darboux- und Segre-Kurven (D.- und S.-K.) je einer Schar sind eben und bilden die Erzeugenden. Von diesen sind die D.-K. Parabeln. 2. $Q = -\bar{Q} = \frac{1}{2} \mathfrak{B}$. Dadurch werden die (reellen) Schiebflächen, deren Erzeugende D.-K. sind, charakterisiert. Jede dieser D.-Schiebkurven ist dann eine kubische Parabel, und die Tangenten jeder Erzeugenden der anderen Schar — S.-Schiebkurve — gehören einem linearen Komplex an. Die gegenseitige Lage der durch einen Punkt einer solchen Fläche gehenden D.- und S.-Schiebkurve wird beschrieben.

O. Boruvka (Brno).

Vincensini, P.: Sur certaines congruences normales dans leurs relations avec les surfaces à courbure totale constante et leurs transformations. Ann. École norm., III. s. 48, 397—438 (1931).

Les congruences ci-dessus se distinguent par les propriétés des leurs foyers, à savoir: 1° les plans perpendiculaires aux segments focaux en leurs milieux passent par un point fixe O (les congruences normales à enveloppée moyenne point — les congruences d'Appell); 2° les congruences normales telles que deux foyers associés sont conjugués par rapport à une sphère fixe de centre O ; et 3° le cas particulier de la précédente, les congruences normales telles que les segments focaux sont vus d'un point fixe O sous un angle droit. — Les congruences d'Appell sont liés aux surfaces minima, à savoir: la surface minima $\zeta_i = U_i + V_i$ donné, le rayon de la congruence parallèle à la normale passe par le point $x_i = U'_i + V'_i$, les U_i et V_i étant des fonctions respectives des variables u et v , les U'_i, V'_i — leurs dérivées. L'auteur examine la transformation de la congruence et de la surface faisant tourner chacun des rayons d'un angle constant autour de sa parallèle issue du point O . Les deux autres congruences sont en relation intime avec les surfaces (Σ) à courbure totale constante. Soit $ds^2 = du^2 + Gdv^2$ l'élément linéaire de (Σ) . Menons par l'origine O le vecteur (OY) parallèle à la tangente à la géodésique $v = \text{const.}$, de la longueur $OY = \sqrt{G}$. La droite Δ qui passe par le point Y parallèlement à la normale de (Σ) , engendre la congruence en question. Les développables en correspondent aux lignes de courbure de (Σ) . Elle est cyclique, les

cercles étant dans les plans passant par O . L'équation qui détermine la congruence est à la fois la première équation de l'applicabilité pour la surface (Σ) . Or la congruence (Δ) fournit une solution de cette équation; donc, elle détermine une surface à courbure constante (Σ) qui est la transformée d'Hazzidakis de (Σ) . Le procédé décrit de la transformation de la congruence donne une nouvelle transformation de (Σ) .

S. Finikoff (Moskau).

Vincensini, P.: Aires courbes en perspective. Surfaces et volumes hélicoïdaux. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 23, 61—89 (1931).

Le Mémoire referé se divise en deux parties séparées. Dans la première l'auteur examine diverses questions qui se rattachent au problème de la comparaison des aires courbes déterminées sur deux surfaces S et S' par des cônes de sommet fixe O . En prenant pour la surface S' un plan P il étudie les surfaces (les surfaces de Jamet) dont les projections d'un cloison quelconque conique sur le plan $P(z = a)$ et orthogonale sur le plan parallèle Oxy sont équivalentes. La droite qui joint les points correspondants des deux plans engendre une congruence (générale) à surface moyenne plane admettant pour 1^{re} nappe focale une droite perpendiculaire au plan en question. En projetant le plan P orthogonalement sur le plan Oxy l'auteur établit un procédé de transformation du plan Oxy en lui-même avec conservation des aires, les points homologues étant alignés au point fixe O . Un autre problème de ce genre c'est le problème de la paire de surfaces sur lesquelles des cônes de sommet O détachent des aires égales. En coordonnées carthésiennes la détermination dépend de l'équation

$$\frac{-px - qy + z}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = z^2 f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

où f est une fonction arbitraire. L'auteur étudie les surfaces qui correspondent dans la transformation ci-dessus au plan, à la sphère; des surfaces de révolution qui correspondent entre elles; le problème analogue pour les cylindres à génératrices parallèles. Exemple: la famille des surfaces en perspective à une sphère de centre O avec égalité des aires est constituée par l'ensemble des surfaces de Monge engendrées par une lemniscate de Bernoulli de centre O , dont le plan roule sur un cône quelconque de sommet O . — Dans la seconde partie l'auteur étudie des courbes qui décrivent dans un mouvement hélicoïdal des aires proportionnelles aux arcs et les surfaces qui au cours d'un mouvement pareil engendrent, par des cloisons d'aire S , des volumes proportionnels à S . Les courbes sont trajectoires orthogonales d'une famille ∞' de géodésiques d'un hélicoïde engendré par le mouvement considéré. Les différentes surfaces portant des cloisons S , sont telles que l'ensemble de leurs positions au cours du mouvement, constitue une famille de Lamé. Toutes les surfaces de la famille sont parallèles et orthogonales à une congruence normale hélicoïdale.

S. Finikoff (Moskau).

Mayer, Walther: Beitrag zur Differentialgeometrie 1-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, die in euklidischen Räumen eingebettet sind. S.-B. preuß. Akad. Wiss., H. 27/29, 606—615 (1931).

Diese Note ist eine Weiterführung von früheren Untersuchungen des Verf. zusammen mit Herrn Burstin über die höheren Krümmungen einer V_l in R_n . [Nach der üblichen Bezeichnungsweise ist eine V_n bzw. eine R_n eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Riemannscher bzw. euklidischer Maßbestimmung. Verf. schreibt hierfür F_l in V_n .] — Jedem Punkte einer V_l in R_n [nach seiner Bemerkung, daß „gerade die geometrisch interessanten Resultate nur für die im euklidischen R_n eingebettete V_l gelten“, scheint Verf. die Tragweite seiner Untersuchung beträchtlich zu unterschätzen; seine Ausführungen lassen sich ohne sehr große Änderungen auf V_l in allgemeinen V_n erweitern. Vgl. auch J. A. Schouten und E. R. van Kampen, Über die Krümmung einer V_m in V_n ; eine Revision der Krümmungstheorie. Math. Ann. 105, 144—159 (1931), wo grundsätzlich allgemein invariant gerechnet wird, während die Rechnung vom Verf. nur für cartesische Orthogonalkoordinaten in der R_n gelten]

kann man in folgender Weise lineare Unterräume zuordnen: J_1 sei die Tangential- R_i der V_i ; der h -te Schmiegevektorraum $J_{12\dots h}$ sei der von den 0-ten, 1-ten, \dots , $(h-1)$ -ten Differentialen der Vektoren von J_1 aufgespannte Vektorraum; seine Dimensionszahl sei ν_h . Schließlich sei J_h die R_{l_h} ($l_h = \nu_h - \nu_{h-1}$) in $J_{12\dots h}$, die vollständig senkrecht zu $J_{12\dots h-1}$ ist. Es gilt dann z. B. der Satz: Die kleinste Dimensionszahl $m (\leq n)$ einer euklidischen Mannigfaltigkeit R_m in R_n , die V_i enthält, ist $m = \sum l_h = \text{Max } \nu_h$. Jedem h läßt sich dann ein $(h-1)$ -ter Krümmungsaffinor zuordnen, der mit einem Index in J_h und mit den h übrigen in J_1 liegt. Durch Zerlegung des $(h-1)$ -ten Krümmungsaffinors nach l_h unabhängigen Maßvektoren von J_h erhält man ein System von l_h „ h -ten Fundamentaltensoren“, die ganz in J_1 liegen. Diese genügen gewissen, der Gaußschen Gleichung analogen Bedingungen. Neu in der vorliegenden Arbeit ist die Einführung der höheren Parallelverschiebungen: ein Vektor des Schmiegevektorraumes $J_{12\dots h}$ der V_i heißt längs einer Kurve der V_i $J_{12\dots h}$ -parallel verschoben, wenn sein Zuwachs stets orthogonal zum $J_{12\dots h}$ ist. Verf. beweist, daß diese Übertragung für Größen vom $J_{12\dots h}$ dann und nur dann integrabel ist, wenn die h -te Krümmungsgröße identisch verschwindet. Zum Schluß definiert Verf. eine Parallelverschiebung für Größen, die auf einer V_i in V_n definiert sind und in einer irgendwie jedem Punkte der V_i zugeordneten R_h liegen. — Bemerkung vom Ref. Man kann auch eine Übertragung für solche Größen der V_i definieren, die ganz in der J_h anstatt der $J_{12\dots h}$ liegen. Dazu definiert man ihr kovariantes Differential als die J_{h+1} -Komponente des Differentials bzgl. der R_n (oder allgemein der V_n). Dieses letztere Differential selbst liegt ganz in $J_{12\dots h+1}$. Die zugehörige Parallelverschiebung ist natürlich durch das Verschwinden dieser J_{h+1} -Komponente definiert. Diese höheren Übertragungen sowie die zugehörigen Krümmungsgrößen und Gauß-Codazzi-Ricci-Gleichungen sind schon von Schouten und van Kampen (l. c.) aufgestellt worden, scheinen aber dem Verf. nicht bekannt gewesen zu sein. Das zur Parallelverschiebung vom Verf. gehörige kovariante Differential ist das genaue Gegenstück hierzu, nämlich die $J_{12\dots h}$ -Komponente des Differentials bzgl. der R_n (bzw. V_n).

D. van Dantzig (Delft).

Thomas, Tracy Yerkas: Conformal tensors. I. (*Dep. of Math., Univ., Princeton.*) Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18, 103—112 (1932).

The paper contains a continuation of the theory of conformal geometry begun by the author in two earlier papers [Proc. Nat. Acad. Sci. 11, 722 (1925) and *ibid.* 12, 352 (1926)]. The major problem of the theory is to construct a sequence of tensor invariants, analogous to the curvature tensor and its successive covariant derivatives in Riemannian geometry, capable of characterising the “conformal Riemann space”, the underlying analytical theory of which is the invariant theory of a quadratic differential form

$\sum_{\alpha, \beta=1}^n G_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ of weight $-2/n$. The method adopted is as follows. Let

$x^\mu = x^\mu(\bar{x})$ be an arbitrary analytic transformation of the x -coordinates to a new set \bar{x}^μ ($\mu = 1, 2, \dots, n$). The convention is made that Greek indices take the values $0, 1, \dots, n$ and Latin the values $0, 1, \dots, n, \infty$, where for convenience ∞ is used instead of the customary $n+1$. A certain set of $(n+2)^2$ quantities u_j^i is suitably defined, together with a connection ${}^0\Gamma$ possessing the law of transformation ${}^0\Gamma_{j\alpha}^i u_q^j = \frac{\partial u_j^i}{\partial x^\alpha} + {}^0\Gamma_{p\mu}^i u_j^p u_\alpha^\mu$. An entity with components $T_{r\dots s}^{p\dots q}$ having the law of transformation

$\bar{T}_{k\dots l}^i \dots u_j^p \dots u_j^q = |u_0^\alpha|^W T_{r\dots s}^{p\dots q} u_k^\alpha \dots u_l^\alpha$ is called a “complete relative conformal tensor of weight W ”; unless one or more of the indices is limited to the range $0, 1, \dots, n$, in which case it is called an “incomplete conformal tensor of weight W ”. The incomplete covariant derivative $T_{r\dots s, \mu}^{p\dots q}$ with respect to the connection ${}^0\Gamma$ is then formed, and it is noted that the restricted range of the added index μ prevents the obtaining of a second covariant derivative of tensor character. Thus arises the necessity of forming a “com-

plete" covariant derivative $T_{r \dots s, k}^{p \dots q}$ by associating with the incomplete derivative the set of quantities defined by $T_{r \dots s, \infty}^{p \dots q} = \frac{n}{K} \sum_{\mu, \nu=1}^n T_{r \dots s, \mu \nu}^{p \dots q} G^{\mu \nu}$, where $T_{r \dots s, \mu \nu}^{p \dots q}$ is formally

the same as the ordinary second covariant derivative with respect to the connection ${}^0\Gamma$. K is the constant $2M - 2N + 2(n+2)W + 2 - n$, where M is the number of indices $r \dots s$ and N the number of indices $p \dots q$. The method is extended to the "completion" of a tensor $D_{r \dots s, \mu \nu}^{p \dots q}$, skew-symmetric in μ, ν , and applied to the "conformal curvature tensor" ${}^0B_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ introduced in the author's earlier papers. Certain exceptional cases (e.g. that for which $K = 0$) are reserved for future consideration.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Rozanskaja, Ju.: Elementare Beweise zweier Urysohnschen Kurvensätze. Mat. Sborn. (Moskva) **39**, H. 3/4, 98—100 u. dtsh. Zusammenfassung 100 (1931) [Russisch].

In this paper proofs which make no use of the notion of an irreducible continuum are given for the following two theorems in the theory of curves due to Urysohn: 1) Every compact continuum K which is of Menger-Urysohn index 2 in each of its points is a simple closed curve. 2) Any compact continuum which contains no continuum of condensation may be decomposed into two sets F and G , where F is closed and zero-dimensional and G is composed of a sequence of mutually exclusive, open, and free arcs $[a_i b_i]$ whose diameters converge to 0 with $1/i$; furthermore, this decomposition is unique except in the case where K is a simple closed curve. In establishing 1) it is proved as a lemma that any point x at which K is not locally connected is of index $\geq \chi_0$ rel. K , a property which follows readily from a theorem of Janiszewski (Thèses, Paris, 1911, p. 22). Use is also made of the theorem (Moore, Tietze, Mazurkiewicz, etc.) that any compact locally connected continuum is arcwise connected. 2) is proved with the aid of a lemma to the effect that any point where K is not locally connected lies on a continuum of condensation of K [see Moore, Bull. Amer. Math. Soc. **25**, 174 (1919); also *ibid.* **29**, 297 (1923)], together with the arcwise connectivity property of locally connected continua. By establishing 1) and 2) on this basis clearness and simplicity are gained.

G. T. Whyburn (Baltimore).

Mechanik der elastisch und plastisch verformbaren Körper.

Müller, E.: Die Berechnung rechteckiger, gleichförmig belasteter Platten, die an zwei gegenüberliegenden Rändern durch elastische Träger unterstützt sind. Ing.-Arch. **2**, 606—621 (1932).

Die Lösung der Plattengleichung für das angegebene Problem wird zusammengesetzt aus zwei Lösungen: Die Lösung ζ_1 für den gleichmäßig belasteten Plattenstreifen, der auf den Seiten $x = 0, a$ frei aufliegt; die Lösung ζ_2 als einfacher Summenausdruck in $\sin y_n, y_n \sin y_n, \cos y_n, y_n \cos y_n$ befriedigt die Randbedingungen auf den Seiten $x = 0, a$ und genügt auf den elastisch gestützten Rändern $y = \pm b$ den Randbedingungen, daß die Randmomente verschwinden und der Auflagerdruck der Platte je Längeneinheit am Rand gleich sein muß der Belastung des betreffenden Trägers. Aus den Randbedingungen sind die Konstanten bestimmt unter der Annahme, daß $\nu = 1/m = 0$ ist. Gerechnet sind Platten mit den Seitenverhältnissen $1/4, 1/2, 1, 3/2$ und 2 mit den Steifigkeitszahlen $k_{1,2} = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3$ und ∞ , wobei $k_{1,2} = \frac{E' J_{1,2}}{E \cdot b \cdot h^3/12}$, E, E' der Elastizitätsmodul der Platte, des Trägers, $J_{1,2}$ die Trägheitsmomente der Träger 1 und 2. Die Biegefläche wird im Schnitt $x = a/2$ und die Biegemomente in Mitte der Platte und in Trägermitte in Diagrammen angegeben. Für die Berechnung der Auflagerdrücke werden Vereinfachungen in der Berechnung der schlecht konvergierenden Reihen angeben und die Formeln für die Auflagerkräfte aufgeschrieben, sowie die Eckkraft, die das Abheben der Platte in den Ecken verhindert.

M. Bergsträßer (Dresden).

Bergmann, Stefan, und H. Reissner: Neuere Probleme aus der Flugzeugstatik. Über die Knickung von rechteckigen Platten bei Schubbeanspruchung. Mitt. I. Z. Flugtechn. 23, 6—12 (1932).

A rectangular plate, edges a and b , is subjected to a uniform shearing force τ per unit length along its edges. The minimum value of τ is sought for which the plate becomes unstable and is deflected from its plane. The deflection w satisfies the differential equation

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{2}{\beta^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \frac{\kappa a^2}{\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

where $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, $\beta = b/a$, $\kappa = 2\tau/D$, D denoting the flexural rigidity of the plate. The boundary conditions are $w = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$. The mathematical problem consists in finding the least value of κ (and therefore of τ) for which the differential equation possesses a solution which does not vanish identically and which satisfies the boundary conditions. The substitution of $w = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta$ in the differential equation, followed by multiplication of the result by $\sin m\pi\xi \sin n\pi\eta$ and integration over the rectangle leads to two infinite sets of linear equations in infinitely many unknowns for the determination of A_{mn} . It is also shown that the Bryan-Ritz method of approximation leads to the same system of equations. The coefficients in these equations are either constants or functions of $\lambda = \pi^4/4\kappa a^2\beta$. The characteristic values of λ are roots of the determinants of the coefficients of these equations. Approximate values of the roots are calculated by equating to zero determinants of the second and higher orders selected from the infinite determinants. To each root λ corresponds a critical shearing force τ and a set of ratios such as $A_{11}:A_{22}:A_{13}\dots$. From the latter the corresponding deformed shape of the surface of the plate is calculated for several values of the ratio β . H. W. March (Madison).

Schmidt, Harry: Zur Dynamik der frei aufliegenden Rechteckplatte. (Theoret. Phys. Inst., Univ. Leipzig.) Z. Physik 74, 130—139 (1932).

Verf. zeigt, wie ein früher angegebenes Integrationsverfahren [Z. Physik 68, 423 (1931); vgl. dies. Zbl. 1, 234] auf zeitabhängige Belastungsvorgänge erweitert werden kann. Als erstes Beispiel wird eine frei gestützte Rechteckplatte behandelt, auf die zur Zeit $t = t_0$ ein rechteckig berandetes Lastfeld aufgebracht wird. Diese räumlich und zeitlich diskontinuierliche Belastung läßt sich mit Hilfe eines vom Verf. bereits mehrfach verwendeten Unstetigkeitsfaktors in Form eines bestimmten Integrals geschlossen darstellen. Durch den gleichen Prozeß, den der Verf. in seiner früheren Arbeit (l. c.) angewendet hat, wird dann die Durchbiegung w in der Gestalt einer räumlich-zeitlichen Fourier-Entwicklung hergestellt. In entsprechender Weise wird sodann der Fall erledigt, daß zur Zeit $t = t_1$ die Belastung abgehoben wird, und dadurch ist die Möglichkeit gegeben, die Wirkung von Belastungsimpulsen rechnerisch zu verfolgen. Da jede zeitlich veränderliche Belastung physikalisch als kontinuierliche Folge von Impulswirkungen aufgefaßt werden kann, so ist die Integration der Plattengleichung auch bei beliebigem zeitabhängigem Störungsglied grundsätzlich geleistet. Als Anwendungsbeispiel dieses Integrationsprozesses wird ein rechteckiges Lastfeld betrachtet, das sich gleichförmig beschleunigt über die Platte hinbewegt. E. Weinel (Göttingen).

Reissner, H.: Theorie der Biegungsschwingungen frei aufliegender Rechteckplatten unter dem Einfluß beweglicher, zeitlich periodisch veränderlicher Belastungen. (Bemerkung zur Arbeit von H. Schmidt.) Ing.-Arch. 2, 668—673 (1932).

Sich unmittelbar an den bekannten Navierschen Ansatz für das statische Biegeproblem der Rechteckplatte anschließend, gewinnt der Verf. unter Voraussetzung einer in eine lokale Doppelfourierreihe entwickelbaren, zeitlich variablen Lastverteilung eine Lösung der Plattengleichung für frei aufliegende Berandung, die sodann auf den zuvor auf abweichendem Wege vom Ref. [Ing.-Arch. 2, 449 (1931); vgl. dies. Zbl. 3, 79]

mit gleichem Ergebnis behandelten Fall eines sich gleichförmig über die Platte hinwegbewegenden, rechteckig begrenzten Lastfeldes spezialisiert wird. Auch die erwähnte, für eine allgemeine dynamische Belastung erhaltene Beziehung ist übrigens mit derjenigen identisch, zu der Ref. (vgl. vorstehendes Ref.) ohne Inanspruchnahme von Fourierentwicklung der vorgegebenen Störungsfunktion gelangt ist. *H. Schmidt.*

Sonier: Plaques minces rectangulaires soumises à des forces variables. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 436—439 (1932).

Die Biegungsschwingungen einer frei aufliegenden rechteckigen Platte unter dem Einfluß einer Einzellast, welche sich mit konstanter Geschwindigkeit parallel zu einem Plattenrand bewegt, werden in Form einer doppelt unendlichen trigonometrischen Reihe dargestellt. Die Ausführungen entsprechen weitgehend denen von H. Reissner, Ing.-Arch. **2**, 668 (1931) (vgl. vorstehendes Ref.). *Prager (Göttingen).*

Jeffcott, H. H.: The more accurate calculation of the deflexion of beams and struts. Philosophic. Mag., VII. s. **13**, 310—322 (1932).

Die Form der Biegelinie eines dünnen Stabes wird für zwei einfache Belastungsfälle mittels sukzessiver Approximationen bestimmt. *Prager (Göttingen).*

Krylov, A.: Sur les formes d'équilibre des pièces chargées de baux. Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Otdél. mat. i estest. Nauk, VII. s. Nr **7**, 963—1012 (1931) [Russisch].

Verf. stellt sich die Aufgabe, Methoden zur Berechnung der Gleichgewichtsfiguren eines gespannten Stabes bei Knickbeanspruchung aufzustellen, die für numerische Berechnungen am geeignetsten sind. Als solche erweisen sich Methoden, die zu elliptischen Integralen erster und zweiter Ordnung führen, für die Legendresche Tafeln existieren. *A. Andronow und A. Witt (Moskau).*

Hohenemser, K.: Beitrag zur Dynamik des elastischen Stabes mit Anwendung auf den Propeller. (Inst. f. Angew. Mech., Univ. Göttingen.) Z. Flugtechn. **23**, 37—43 (1932).

Die Aufgabe der Ermittlung der Grundschnitzzahlen für die elastischen Schwingungen ist für die verschiedenartigsten Systeme neuerdings häufig behandelt worden, und man kennt Verfahren, die praktisch genügende Resultate liefern. Weniger geklärt ist die Frage, wie man zur Ermittlung von Oberschnitzzahlen, die im Betriebe ebenfalls angeregt werden können, am zweckmäßigsten vorgeht. — Verf. gibt für die Bestimmung der Knotenpunkte der Biegeoberschwingungen eines elastischen Stabes ein rasch konvergierendes Verfahren an, das im wesentlichen die Aufzeichnung von Momenten- und Biegelinien verlangt. Die Oberschnitzzahlen werden dann als Grundschnitzzahlen des durch Lager in den Knoten abgeänderten Systems berechnet. — Es werden ferner die Schwingungen des umlaufenden, also durch die Zentrifugalkräfte versteiften Propellers diskutiert. *K. Klotter (Karlsruhe).*

Neményi, P.: Tragwerke auf elastisch nachgiebiger Unterlage. Z. angew. Math. Mech. **11**, 450—463 (1931).

The paper is a report on the present status of the problem of a loaded beam or plate resting upon a continuous elastic support. Chapter I gives an introductory statement of the problem and the fundamental assumption of Schwedler that the reaction of the support at any point is proportional to the deflection at that point. Chapter II is devoted to the one dimensional problem of the beam, Chapter III to the symmetrically loaded and supported circular plate, and Chapter IV to plates of other shapes under more general types of loading. The fundamental differential equation is $\Delta^4 w = p(x, y) - kw$, with the corresponding forms in one independent variable in Chapters II and III. A very complete summary is given of the literature concerned not only with methods of solution of the differential equation for the problems in question but also with extensions and modifications of the formulation of the problem. Chapter V contains a critical discussion of Schwedler's assumption, a sketch of a method of Wieghardt leading to an integral equation, and conclusions from the standpoint of the engineer. *March (Madison).*

Callandreau, Édouard: Sur l'effort maximum dans un corps plan percé d'un trou circulaire. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 435—436 (1932).

Der bekannte Größtwert der Zugspannungen in einem gezogenen Streifen mit unendlich kleiner kreisrunder Bohrung wird abgeleitet unter Anknüpfung an Formeln, welche Davin kürzlich mitgeteilt hat [C. R. Acad. Sci. Paris **193**, 1318 (1931)].

Prager (Göttingen).

Baranow, G.: Zur Berechnung der Drehschwingungszahlen. (Luftfahrt-Inst., Moskau.) Z. Ver. Deutsch. Ing. **1932**, 184.

Gegeben ist eine masslose Welle konstanten Durchmessers mit vier Einzelmassen. Die drei Schwingungszahlen werden so bestimmt, daß man ohne Aufstellung der Frequenzgleichung (Säkulargleichung) zunächst in bekannter Weise (Wydler) die dritte Schwingungszahl und dann durch eine gewisse „Reduktion des Systems“ die zweite und die erste Eigenschwingungszahl ermittelt. Das Verfahren wird besonders einfach durch Anwendung des graphischen, das Seilpolygon benutzenden Verfahrens von Kutzbach (Z. Ver. Deutsch. Ing. **1917**, 917).

W. Meyer zur Capellen (Koblenz-Mosel).

Schunck, T. E.: Berechnung der kritischen Umlaufzahlen für die Welle eines Flugzeugmotors. Ing.-Arch. **2**, 591—603 (1932).

In Anlehnung an einen Aufsatz von Kluge [Ing.-Arch. **2**, 119—139 (1931); vgl. dies. Zbl. **1**, 361] wird ein System von Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten und mit periodischer Störungsfunktion auf der rechten Seite daraufhin untersucht, wann die Lösungen über alle Grenzen wachsen, was darauf hinausläuft, die periodischen Lösungen des homogenen Gleichungssystems zu finden, d. h. ihre Eigenwerte zu bestimmen — nur diese interessieren vom praktischen Standpunkt. Dies wird abweichend von Kluge auf ähnlichem Wege versucht, wie es vom Ref. (vgl. dies. Zbl. **1**, 63) entwickelt wurde. Nur ist der Parameter, nach welchem Eigenwert und Eigenfunktion entwickelt werden, von vornherein gleich eins, auch wird nur die erste Annäherung benutzt. — Man findet, daß gegenüber dem klassischen Ansatz eine Verschiebung und eine Aufspaltung der Eigenwerte auftritt, welche erstere von vornherein durch passenden Ansatz ermittelt werden kann.

W. Meyer zur Capellen (Koblenz-Mosel).

Callandreau, Édouard: Sur une propriété des cylindres circulaires soumis à la torsion. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 687—689 (1932).

Bei der Torsionsbeanspruchung eines kreiszylindrischen Stabes werden bekanntlich senkrecht zur Stabachse gelegte ebene Querschnitte nicht verwölbt. Der Verf. gibt einen, wie er glaubt, neuen Beweis dafür an, daß die Stäbe mit Kreis- und Kreisringquerschnitt die einzigen sind, welche diese Eigenschaft besitzen.

Prager (Göttingen).

Hohenemser, K., und W. Prager: Beitrag zur Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flußstahl. Z. angew. Math. Mech. **12**, 1—14 (1932).

Die Verff. verfolgen mit dem obigen Aufsatz einen zweifachen Zweck. Erstens wird eine klare Übersicht zusammengestellt über die bis jetzt gewonnenen Ansichten mit Bezug auf die Plastizitätsbedingung, unter welcher bekanntlich die Angabe aller möglichen Spannungszustände, bei denen Fließen eintritt, verstanden wird. Zweitens werden Versuchsergebnisse mitgeteilt, welche teilweise in Einklang mit den bisherigen Ansätzen der Plastizitätsmechanik stehen, teilweise diesen widersprechen. Aus diesem Widerspruch ist ein neuer Ansatz entstanden, welcher die bisherigen Ansätze als Sonderfälle enthält. Es bleiben aber Diskrepanzen zwischen Ansatz und Experiment bestehen, welche darauf hinweisen, daß der infolge der vorangehenden Verformungen auftretenden Anisotropie Rechnung getragen werden muß. Schreibt man:

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad \Sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}, \quad \Sigma_0 = \begin{Bmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma) \end{Bmatrix},$$

so daß Σ_0 den Spannungsdeviator bedeutet,

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \quad E_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & (\varepsilon_y - \varepsilon) & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{Bmatrix},$$

so daß E_0 den Verformungsdeviator darstellt, so handelt es sich im wesentlichen um die Beziehung, welche zwischen E_0 und Σ_0 besteht. — Nimmt man an, daß im plastischen Gebiete die Änderung des Spannungsdeviators nicht nur von der Änderung des Deformationsdeviators abhängt, sondern auch noch von den augenblicklichen Werten von E_0 und Σ_0 (welche als abhängig von einem Parameter t , welcher z. B. die Zeit vorstellen kann, vorausgesetzt werden), so gilt als einfachster Ansatz die Gleichung

$$c_1 E_0 + c_2 \Sigma_0 + c_3 \frac{dE_0}{dt} + c_4 \frac{d\Sigma_0}{dt} = 0, \quad (1)$$

wo die Beiwerte c Funktionen der skalaren Invarianten der vier Tensoren E_0 , Σ_0 , $\frac{dE_0}{dt}$ und $\frac{d\Sigma_0}{dt}$ sind. — Neben (1) besteht noch die oben erwähnte Fließbedingung $\Sigma_0^2 = 2k^2 = A^2$, so daß noch zwei weitere Gleichungen zur Festlegung der Größen $\frac{c_1}{c_4}$, $\frac{c_2}{c_4}$, $\frac{c_3}{c_4}$ erforderlich sind. Sowohl der St. Venant-Misessche Körper wie der Prandtl-Reussche Körper können durch geeignete Spezialisierung aus dem Ansatz (1) abgeleitet werden. Auch der von Hohenemser und Prager vorgestellte Körper wird mit diesem Ansatz in Verbindung gebracht.

C. B. Biezeno (Delft).

Reuss, A.: Fließpotential oder Gleitebenen? Z. angew. Math. Mech. 12, 15—24 (1932).

In der vorliegenden Arbeit wird die von R. v. Mises [Z. angew. Math. Mech. 8, 161 (1928)] für rein plastische Formänderungen aufgestellte Fließpotentialtheorie so erweitert, daß sie auch elastisch-plastische Formänderungen umfaßt. Die Deformationsgeschwindigkeiten eines bildsamen Körpers sollen sich unter dem Einfluß eines Spannungszustandes, welcher an der Fließgrenze liegt, so regeln, daß sie bei einer mit der Fließbedingung verträglichen Variation der Spannungen keine zusätzliche plastische Formänderungsarbeit leisten und daß das Volumen nur elastisch verändert wird. Für isotrope Körper führt dieses Prinzip bei Verwendung der Misesschen Fließbedingung zu Spannungs-Formänderungsbeziehungen, die der Verf. bereits in einer früheren Arbeit auf anderem Wege gefunden hat [Z. angew. Math. Mech. 10, 266 (1930)]. Der Fließpotentialtheorie wird die Mohrsche Gleitebenentheorie gegenübergestellt. Die sich aus beiden Theorien ergebenden Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen stimmen auch dann nicht überein, wenn man in beiden Theorien die gleiche (Mohrsche) Fließbedingung verwendet, nur im Falle des speziell plastischen Körpers (konstante Fließschubspannung) ergeben sich aus beiden Theorien die gleichen Beziehungen. Um eine experimentelle Entscheidung zwischen beiden Theorien anzubahnen, werden ihre Aussagen über den Zugversuch mit einem bis zur Fließgrenze verdrehten dünnwandigen Rohre verglichen. Während die Fließpotentialtheorie mit Misesscher Fließbedingung ein monotones Anwachsen des Rohrrohrhraumes mit wachsender Dehnung liefert, ergibt sich aus der Gleitebenentheorie nach anfänglicher geringer Zunahme eine starke Abnahme des Rohrrohrhraumes bei wachsender Dehnung des Rohres. An diesen auffallenden Unterschied können experimentelle Untersuchungen anknüpfen.

Prager (Göttingen).

Davin: Sur l'état élastique et plastique d'un corps indéfini à deux dimensions percé d'un trou circulaire et sollicité par une tension uniforme à l'infini. C. R. Acad. Sci. Paris 194, 522—524 (1932).

Die elastisch-plastische Spannungsverteilung in einem gelochten Zugstab, dessen Breite groß ist gegenüber dem Lochdurchmesser, wird ermittelt unter der Voraussetzung, daß das plastische Gebiet noch klein ist. Die Lösung unterscheidet sich infolgedessen kaum von der bekannten Lösung des entsprechenden elastischen Problems.

Prager.

Ewing, J. A.: Photo-elasticity. Nature (London) 1932 I, 264—266.

Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper.

● **Prandtl, Ludwig:** Abriß der Strömungslehre. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn A.-G. 1931. VI, 223 S. u. 221 Abb. R.M. 13.80.

Bernoulli's equation is applied to flow in a spiral housing and to the initial efflux of water from a vessel. The constant in the equation may have different values for two streams of different origin which come together at a sharp edge; there is then a discontinuity in velocity at the dividing surface since the pressure is continuous. Observation of such vortex sheets indicates that they soon lose their original form. Indeed, as soon as the surface assumes a wavy form the corresponding distribution of pressure in steady flow tends to make the waves more pronounced. The result is a disintegration of the vortex sheet into separate vortices. Diagrams are given to show different types of flow, particularly those including vortices when the flow is round an obstacle, through a slit or past a hole. The relation of this type of flow to some methods of measuring pressure is pointed out. — In the treatment of potential flow special attention is paid to flow with circulation and the Kutta-Joukowski theorem is given with an application to a shovel grating of a turbine. A derivation of Euler's turbine equation is also given. — Flow past a flat plate and flow through a pipe are treated by up to date methods and the phenomena are elucidated by means of the author's theories of mixing motions and of secondary flow. The theory of resistance and the properties of wings are developed with reference to the scale effect or the Reynolds number and there is a very useful presentation of the vortex theory of wings, propellers and windmills. There are illuminating remarks too on turbines, the Pelton, Francis and Kaplan wheels, the centrifugal pump, the Kaplan turbine and related appliances. The different measuring instruments used in a wind tunnel are described in detail. — The chapter on the dynamics of gases contains a concise exposition of flow past an edge of a flat plate when the stream is moving originally along parallel straight paths with a velocity exceeding the velocity of sound under the prevailing conditions. Use is made of oblique compression shocks both in the treatment of this problem and of the processes in a free gas jet. A graphical method of treating problems of flow at high speeds is also developed.

H. Bateman (Pasadena).

Cisotti, Umberto: Scie limitate. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 1, 101—112 (1932).

Verf. diskutiert die Frage, ob das Totwassergebiet hinter einem Körper (zweidimensionaler Fall) in einer idealen Flüssigkeit endlich sein kann. Die freien Grenzen dürfen dann nicht überall konvex gegen die Strömung sein; auch dürfen keine Wendepunkte auf den freien Linien auftreten. Die Methode von Levi-Civita erlaubt das allgemeine Integral der Bewegung aufzustellen und für den Fall eines polygonalen Widerstandskörpers zu spezialisieren. Die Möglichkeit der Existenz eines beschränkten Totwassers wurde, wie es Verf. hervorhebt, von anderen Autoren verneint.

A. Weinstein (Breslau).

Pascal, Mario: Azioni di correnti fluide tridimensionali e circuitazione superficiale. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 69, 137—143 (1931).

Ein Körper bewegt sich schraubenförmig in unendlich ausgedehnter Flüssigkeit. Der Verf. berechnet die auf den Körper wirkende Kraft mit Hilfe des Begriffes der „Oberflächenzirkulation“. Das Element der Oberflächenzirkulation ist definiert durch

$$d\Gamma = [v df] \left(\frac{m^3}{\text{sec}} \right). \quad \text{I. Lotz (Göttingen).}$$

Weinstein, A.: Sur le mouvement d'un fluide à travers un barrage perméable. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 276—278 (1931).

This paper discusses the flow of an incompressible fluid through a permeable trapezoidal dam from a higher to a lower level. The usual simplifying hypotheses being made the problem is solved by a conformal mapping involving elliptic integrals. No

details are given in the present note and the reader is referred to a forthcoming paper in the *Math. Z.* The formula stating the result of the investigation is highly complicated and does not seem easily amenable to numerical evaluation. *Murnaghan.*

Rosenhead, L.: Note on the instability of a surface of discontinuity. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **28**, 35–44 (1932).

Diese Untersuchungen über die Instabilität einer Diskontinuitätsfläche zwischen zwei ebenen, wirbelfreien Flüssigkeitsströmen mit der Geschwindigkeit U und U' und endlichen Tiefen h und h' sind als Fortsetzung einer Arbeit des Verf.: „Die Bildung von Wirbeln an einer Diskontinuitätsfläche“ [*Proc. Roy. Soc. London A* **134**, 170 bis 192 (1931); vgl. dies. Zbl. **3**, 84] aufzufassen. Hier wird die Problemstellung insofern erweitert, als die Anfangsstörung der Trennungsebene $y = 0$ in der Form

$$y = \sum_n a_n \cos k_n x$$

angesetzt wird, um nachweisen zu können, ob es eine bestimmte Wellenlänge gibt, die bei der Störung der Trennungsschicht anderen Erregungswellen gegenüber vorherrschend ist. In erster Näherung erhält man

$$y = \sum_n a_n e^{i(\sigma_n t - k_n x)};$$

in zweiter Näherung wird angesetzt:

$$y = \sum_n a_n e^{i(\sigma_n t - k_n x)} + y_2(x, t).$$

Dem Verf. gelingt es, y_2 näherungsweise zu errechnen. Daraus ergibt sich schließlich, daß keine „vorherrschenden“ Einzelwellen oder Wellengruppen entstehen, wenn man sich auf Näherungen 2. Ordnung beschränkt. — Für den speziellen Fall $U' = -U$, $h \rightarrow \infty$, $h' \rightarrow \infty$, $k_n = k$ erhält der Verf. das Resultat:

$$y = a e^{kU t} \cos kx + \frac{1}{2} U k^2 a^2 \left(t e^{2kU t} - \frac{1}{2kU} \sin 2kU t \right) \sin 2kx,$$

das in enger Beziehung zu der obenerwähnten Arbeit des Verf. steht.

A. Kneschke (Dresden).

Kitagawa, Kiugoro: Sur l'expansion de la cavité sphérique dans les masses fluides. *Mem. Coll. Sci. Kyoto A* **14**, 23–42 (1931).

The author treats the problem of a spherical mass of gas surrounded by a perfect fluid infinite in extent, the whole system being free from the action of external forces. The gas is supposed to be initially expanding (the pressure and density being connected by the adiabatic law) and the problem is to determine the subsequent oscillatory motion (expansion and contraction) of the spherical mass of gas. Denoting the radius of the sphere by R the governing differential equation is found to be

$$\left(\frac{\rho_0}{5} R_0^3 + \rho_1 R^3 \right) \dot{R}^2 + \frac{2p_1}{3} R^3 + \frac{2p_0 R_0^{3\gamma}}{3\gamma - 3} R^{3-3\gamma} - \frac{2p_1}{3} R_0^3 - \frac{2p_0}{3\gamma - 3} R_0^3 = 0,$$

where (ρ_0, p_0) are the initial density and pressure of the gas, (ρ_1, p_1) are the density and pressure of the fluid, R_0 is the initial value of R and γ is the ratio of the specific heats of the gas. The maximum value of \dot{R} is calculated as is also the minimum pressure of the gas. The formula for the “duration of the explosion” i. e. the time elapsed until $\dot{R} = 0$ involves elliptic integrals of the first and second kind. Several numerical examples are evaluated.

Murnaghan (Baltimore).

Barrillon, E.-G.: Sur la congruence des droites de poussée. *C. R. Acad. Sci. Paris* **194**, 536–538 (1932).

Kurzer Bericht von Barrillon über eine Arbeit d'Ocagnes betreffend die Beziehungen zwischen Schwimmkörper, Schwimmebene, Hüllfläche, Schwerpunktslagen und Auftriebsachse (droite de poussée) bei vorgeschriebenen Bedingungen.

Carl v. d. Steinen (Hamburg-Bergedorf).

Havelock, T. H.: Ship waves: The calculation of wave profiles. *Proc. Roy. Soc. London A* **135**, 1—13 (1932).

Havelock entwickelt seine Theorie der Schiffswellen-Profile vom Geschwindigkeitspotential eines an gegebener Stelle unter Wasser befindlichen Dipols aus. Er untersucht zunächst eine gleichförmige Dipolverteilung in vertikaler Linie, sodann eine gleiche Verteilung von endlicher Länge in der Bewegungsrichtung. So findet er die Oberflächenkurve in der Bewegungsrichtung. In ähnlicher Weise geht er bei einer dem gegebenen Schiffsmodell entsprechenden Polverteilung vor. Schließlich kommt er durch Verallgemeinerung der Ergebnisse zu der Mitten-Oberflächenerhebung für ein Modell von beliebiger Wasserlinienform bei unendlichem Tiefgang. Eine kurze Analysis für ein parabolisches Modell soll die allgemeinen Ergebnisse anschaulich machen.

Carl v. d. Steinen (Hamburg-Bergedorf).

Mache, Heinrich: Anwendung von Ähnlichkeitsbetrachtungen auf die Strömung der Elektrizität in Gasen. (*Phys. Inst., Techn. Hochsch., Wien.*) *Physik. Z.* **33**, 43—46 (1932).

In Anlehnung an die bekannten Reynoldsschen Ähnlichkeitsbetrachtungen in der Hydrodynamik wird versucht, ähnliche Betrachtungen auf die stationäre elektrische Strömung in ionisierten Gasen anzuwenden. Für den Fall eines mit einem Gas von gegebener Dichte und Temperatur gefüllten Plattenkondensators läßt sich so leicht angeben, wie die Stärke des Ionisators, die Plattendistanz und die Stromstärke verändert werden müssen, um ähnliche Verteilungen von Feldstärke und Ionendichte zu erhalten, wenn man die Diffusion der Ionen vernachlässigt. Auf Grund dieser Beziehungen ist es möglich, durch Aufnahme einer einzigen Stromspannungskurve bei bekannter Ionisierungsstärke alle anderen für beliebige Ionisierungsstärken zu erhalten und daher Ionisierungsstärken durch Ströme zu messen, die weit von der Sättigung entfernt sind. Ähnliche Betrachtungen werden auf den Zylinderkondensator übertragen und schließlich noch der Einfluß der Ionendiffusion diskutiert. *Fürth* (Prag).

Schneider, W.: Über die Bestimmung des Druckes in Luftstoßwellen. (*Chem.-Techn. Reichsanst., Berlin-Plötzensee.*) *Z. Physik* **74**, 66—87 (1932).

In der Luftstoßwelle treten sehr schnelle und starke Druckänderungen auf. Es ist deshalb schlecht möglich, mit einem Membranapparat eine verzerrungsfreie Aufzeichnung des Druckes der Luftstoßwelle zu erhalten. Es wird ein Verfahren zur Berechnung des Druckes aus verzerrten Aufzeichnungen beschrieben. Ausgehend von der allgemeinen Bewegungsgleichung für die Membran:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\delta \frac{dy}{dt} + c^2 y = p(t)$$

(wo m = Masse, δ = Dämpfungskonst., c^2 = statische Kraft) wird der Druck $p(t)$ bestimmt, indem aus der Weg-Zeit-Kurve, die in Fourier-Reihenform gegeben gedacht wird, dy/dt und d^2y/dt^2 berechnet wird. Bis auf den Maximaldruck im ersten Druckstoß ist die Druckbestimmung möglich. Um den Maximaldruck im ersten Druckstoß zu bestimmen, wird ein Maximaldruck angenommen, der durch Extrapolation des durch die Differentiation gewonnenen Druckes ermittelt wird. Die dem gesamten Druckverlauf entsprechende Weg-Zeit-Kurve wird berechnet und mit der registrierten verglichen. Im Falle schlechter Übereinstimmung wird der extrapolierte Maximaldruck so lange geändert, bis eine Übereinstimmung erzielt ist. *I. I. Sommer* (München).

Paris, E. T.: A note on the sound generated by a rotating airscrew. *Philos. Mag.*, **VII. s. 13**, 99—111 (1932).

The author's experimentally determined distribution of the amplitude of the fundamental sound of rotation produced by a two-bladed airscrew on a stationary airplane is represented by a polar diagram relative to the forward axis of the screw, β being the polar angle. — On the axis of rotation ($\beta = 0^\circ$ and $\beta = 180^\circ$) the amplitude is zero. The amplitude has a principal maximum for $\beta = 115^\circ$ approximately and a subsidiary maximum for $\beta =$ about 30° or 45° . — By combining two hypotheses used by Lynam and Webb the author finds by trial that the chief features of the observed sound distribution may be explained by supposing

that the sound arises from a ring of sources in front of the plane of rotation, a ring of sinks behind it and a ring of sources in the plane of rotation. The sources are in parallel planes separated by gaps of length Y and lie on circles of radius R . Good agreement was obtained by taking $Y = 3L$, $4R = 3L$, where L denotes the length of the blade. *Bateman* (Pasadena).

Da Rios, L. S.: Sui vortici piani indeformabili. Atti Pontif. Accad. Sci. Nuova Lincei 84, 720—731 (1931).

L'A. riprende l'espressione $V = -\frac{lc}{2\pi} \log \varrho$ colla quale anni addietro aveva stabilito le equazioni intrinseche del moto dei vortici in un fluido omogeneo incompressibile e indefinito (cfr. Rend. Circ. mat. Palermo, 1910), deducendo una soluzione più semplice e completa della ricerca dei vortici piani ed indeformabili. Fra le curve rappresentative di questi vortici sono particolarmente discusse quelle che corrispondono ad un movimento rigido rotatorio, per il quale le curve integrali risultano appartenere a tre tipi distinti che sono denominati dall'A. rispettivamente: pseudocicloide, pseudocatenaria e sinusoide fluviale. *Bossolasco* (Turin).

Pistoiesi, E.: Il calcolo approssimato del biplano indefinito. Aerotecnica 11, 1506 bis 1517 (1931).

Der Verf. gibt für das schon oft behandelte Problem des unendlich breiten Doppeldeckers einfache Näherungsformeln zur Berechnung der für glatten Abfluß an der Flügelhinterkante notwendigen Zirkulation um den einzelnen Flügel. Er bildet jeweils einen Flügel auf einem Kreis ab und ersetzt den zweiten durch einen Wirbel in seinem Zirkulationsschwerpunkt. Auf dieser Grundlage kann ein Iterationsverfahren aufgebaut werden. — Für zwei Beispiele berechnet der Verf. die erste Näherung: für den ungestaffelten Doppeldecker, dessen Flügel ebene Platten mit gleichem Anstellwinkel sind, und für einen gestaffelten Doppeldecker, dessen dünne gekrümmte Profile verschiedenen Anstellwinkel haben. Dabei wird angenommen, daß der Zirkulationsschwerpunkt in einem Viertel der Tiefe von der Vorderkante entfernt liegt, und daß bei der Abbildung eines Profiles auf den Kreis ($\zeta = z + \frac{a_1}{z} \dots$; ζ und z -Ebene übereinandergelegt) der Hinterkante des Profils ein Punkt entspricht, der ein Viertel der Tiefe von der Hinterkante entfernt liegt. Für das erste Beispiel ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit dem Ergebnis der strengen Theorie (Abbildung durch elliptische Integrale), wenn das Verhältnis Abstand der Flügel zu Flügeltiefe größer als 1 ist. Das Ergebnis des zweiten Beispiels entspricht den früher von Ferrari gefundenen Näherungsformeln. *I. Lotz* (Göttingen).

Poggi, L.: Sul peso delle ali a sbalzo. Aerotecnica 11, 1518—1538 (1931).

Für eine Familie frei tragender Flügel mit gleichem Flächeninhalt, aber verschiedenen Umrißformen wird der Zusammenhang zwischen Seitenverhältnis und induziertem Widerstand bestimmt und dann untersucht, wie sich bei gegebenem induziertem Widerstand das Holmgewicht mit dem Formparameter ändert. Zu unterscheiden sind zwei Fälle: Der verwundene Flügel mit konstantem wirksamem Anstellwinkel (der jedoch nur für einen einzigen geometrischen Anstellwinkel verwirklicht werden kann) führt zu merklichen Gewichtersparnissen, wenn man im Vergleich zum alloptischen Tragflügel stärker verjüngte Umrißformen wählt; der unverwundene Flügel bringt wegen der Veränderlichkeit des wirksamen Anstellwinkels längs der Spannweite Verluste an Höchstauftrieb in solchem Maße mit sich, daß der Vorteil der Gewichtersparnis aufgewogen wird, falls es sich nicht um Flugzeuge mit großem Seitenverhältnis handelt, bei denen das Holmgewicht einen größeren Anteil am Fluggewicht ausmacht.

H. B. Helmbold (Göttingen).

Verduzio, Rodolfo: Sollecitazioni alla partenza ed all'ammarramento negli idrovolanti. Aerotecnica 11, 1343—1405 (1932).

Zusammenfassende Darstellung experimenteller und theoretischer Untersuchungen über die Stoßbeanspruchungen beim Abflug und Anwassern von Seeflugzeugen. Ausführlich wiedergegeben sind die Theorien von v. Kármán, Pabst und H. Wagner.

H. B. Helmbold (Göttingen).

Klassische Theorie der Elektrizität.

Tonks, Lewi: Impedance characteristics of loaded Lecher systems. *Physics* 2, 1—11 (1932).

Der Wechselstromwiderstand einer homogenen Doppelleitung mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität wird berechnet und diskutiert, wenn die Leitung durch einen Ohmschen Widerstand abgeschlossen ist. Bei fester Frequenz wird zu vorgegebenem Wechselstromwiderstand die zugehörige Leitungslänge und Abschlußwiderstand ermittelt.

Cauer (Göttingen).

Hartig, H. E.: Charts for transmission line problems. (*Dep. of Electr. Engineer., Univ. of Minnesota, Minneapolis.*) *Physics* 1, 380—387 (1931).

Übersichtstafeln für $\operatorname{Coj}(A + iB) = Re^{i\theta}$ und $\operatorname{Sin}(A + iB) = Re^{i\theta}$ werden gegeben zur Ermittlung von Spannung, Strom und Widerstand einer Fernleitung.

Cauer (Göttingen).

Ferrier, R.: Sur le glissement d'un influx électrique périodique le long d'un cylindre-axe. *C. R. Acad. Sci. Paris* 194, 65—67 (1932).

Die allgemeine Lösung der Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen längs eines Zylinders wird diskutiert und auf die Möglichkeit hingewiesen, durch eine Anisotropie der den Leiter bildenden Materialien (bei Wahrung axialer Symmetrie) die Konzentration der fortgeleiteten Energie an der Leiteroberfläche zu erhöhen.

E. Weber.

Forstmann, Albrecht: Über die rechnerische Behandlung mechanischer schwingungsfähiger Gebilde unter Benutzung äquivalenter elektrischer Ersatzschemen. *Hochfrequenztechn. u. Elektroakust.* 39, 11—18 (1932).

Nach einer allgemeinen Einleitung über die äquivalenten Größen (Masse—Selbstinduktion, Amplitude—Ladung usw.) bei linearen elektrischen und mechanischen Systemen behandelt Verf. das elektrische Ersatzschema des einfachsten linearen mechanischen schwingungsfähigen Systems. Mit Hilfe dieses Elementarschemas werden sodann elektrische Ersatzschemen für den elektrodynamischen Konuslautsprecher, den elektromagnetischen Tonabnehmer und den elektromagnetischen Konuslautsprecher durchgerechnet und diskutiert.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Swann, W. F. G.: The solution of steady-state problems in dielectric, magnetically permeable, and conducting media, with special reference to mathematical analogies between magnetic problems and current-flow problems. *J. Franklin Inst.* 213, 155—170 (1932).

Der Verf. zeigt durch parallele Behandlung der drei Probleme die zwischen ihren Lösungen bestehenden Analogien. Die Randbedingungen faßt er so allgemein, daß auch flächenförmige Quellen wahrer elektrischer und magnetischer Ladungen und des wahren elektrischen Stromes zugelassen sind. Die Eindeutigkeit der Lösung wird unter Annahme von erweiterten Verknüpfungsgleichungen und von erweiterten Randbedingungen mit Hilfe der Greenschen Sätze bewiesen. Zum Schlusse zeigt er, wie ein stationäres elektromagnetisches Feld in einem leitenden Medium mit von 1 verschiedener Dielektrizitätskonstante und magnetischer Permeabilität bestimmt wird. In einem Anhang wird das Einfügen permanenter Magneten in das Gleichungssystem erklärt.

Friedrich Zerner (Wien).

Dalla Valle, Joseph M.: Note on the Heaviside expansion formula. (*Dep. of Publ. Welfare, Univ., Cleveland.*) *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 17, 678—684 (1931).

Verf. zeigt, wie man die Heavisidesche Lösung der Telegraphengleichung erhalten kann mit Hilfe einer Methode, welche Rayleigh in seinen Untersuchungen über die Schwingungentheorie gebraucht hat. (S. Rayleigh, *Sci. Papers* 1, 176—187.)

Janczewski (Leningrad).

Ladner, A. W.: A graphical synthesis of aerial arrays. *Marconi Rev.* Nr 33, 11—18 (1931).

A graphical method of drawing the vertical and horizontal polar diagrams of any array of spaced aeriels is described. The method is based on the principle that the

complete polar diagram of any system of unit radiators with the same characteristic is a combination of the "spacing diagram", which depends upon the distance apart and phase of two spaced point sources of radiation, and the "unit diagram", which is the diagram of the separate sources themselves. Diagrams of various arrays are given.

Mary Taylor (Slough).

Zickendraht, Hans: Messungen im Nahfeld eines Rundspruchsenders. (*Abt. f. Angew. Phys. u. Versuchsradiostat., Phys. Anst., Univ. Basel.*) *Helv. phys. Acta* 5, 3—25 (1932).

The theoretical part of this paper contains a calculation of the electric and magnetic fields due to a Hertzian doublet of length l cm. at points in the immediate neighbourhood of the doublet, in the "transition zone", and at a great distance from the doublet. Expressions are also found for the effective magnetic and electric field strengths in the "transition zone" of an antenna of finite height carrying a linear distribution of current.

Mary Taylor (Slough).

Nakayama, W., und K. Komatu: Über die Ausstrahlung der vertikalen Antennen in der drahtlosen Telegraphie mit kurzen Wellen. *Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ.* A 14, 1—22 (1931).

This paper considers the radiation from earthed vertical antennae of finite length, excited in their fundamental oscillation or a harmonic thereof. The mathematical method used is a combination of the known methods due to Sommerfeld and Abraham. The case of a dipole at a finite height above a plane earth is first considered and from this the authors find the Hertzian function at the earth's surface for the field due to the earthed antenna of finite length and that giving the distribution in space of the energy radiated. From this the magnetic field is calculated and the energy emitted in various directions is tabulated. Polar diagrams are drawn for various cases.

Mary Taylor (Slough).

McLean, D. A., R. L. Peek jr. and E. E. Schumacher: Some physical properties of wiping solders. *Bell Syst. techn. J.* 11, 101—125 (1932).

Weber, Ernst: Field transients in magnetic systems. A study of field transients in iron cores partially laminated and partially solid. *Trans. Amer. Inst. Electr. Eng.* 50, 1234—1246 (1931).

In der Arbeit wird das Problem eines Stromkreises mit Funkenstrecke gelöst, der einen Elektroinduktor (z. B. den Ring eines Generators) mit teilweise festem und teilweise aus Lamellen bestehendem Eisenkern enthält; der Primärstrom wird plötzlich mit Maximalspannung eingeschaltet. Zuerst stellt Verf. die Differentialgleichungen für die magnetischen Feldstärken, die vom Primärkreis und den Wirbelströmen im festen Eisenkern erzeugt werden; die Integration nach der Zeit läßt sich mit Hilfe der Heavisideschen Operatorrechnung ausführen. Das wesentliche Resultat ist, daß die Zeitkonstante des magnetischen Feldes sich aus der Zeitkonstante des Primärkreises und einem Teil der Zeitkonstante des festen Eisenkerns berechnet; die letztere rührt von den Wirbelströmen her. Den Schluß bildet numerische Diskussion und Angaben über Anwendungsmöglichkeiten der Resultate. *Bechert* (München).

Pietenpol, W. B., and E. C. Westerfield: The problem of rotating magnets. *Physic. Rev.*, II. s. 38, 2280—2289 (1931).

Das auf einen stromdurchflossenen Magnet wirkende Drehmoment wird berechnet aus der elektromagnetischen Wirkung der einzelnen Stromelemente auf die Ampèreschen Molekularströme. Der erhaltene Ausdruck ist allgemeiner als ein früher von Zeleny und Page berechneter, indem die von ihnen gemachte Voraussetzung gleichmäßiger Strom- und Magnetisierungsverteilung hier nicht verwendet wird.

Bloch (Leipzig).

Bellia, C.: Sopra la legge di variazione dell'effetto Hall con il campo magnetico. (*Istit. di Fis., Univ., Catania.*) *Nuovo Cimento*, N. s. 8, 377—388 (1931).

Baerwald, H. G.: Der Geltungsbereich der Strecker-Feldtkellerschen Matrizen-gleichungen von Vierpolsystemen. (*Heinrich-Hertz-Inst. f. Schwingungsforschg, Berlin.*) Elektr. Nachr.-Techn. 9, 31—38 (1932).

Analog der Reihenschaltung (Rs.) und Parallelschaltung (Ps.) von Zweipolen lassen sich Rs. und Ps. für Vierpole (Vp.) definieren. Der Addition der Widerstände bei Rs. entspricht die Addition gewisser für die Vp. charakteristischer Matrizen, der Addition der Leitwerte bei Ps. entspricht die Addition der zu jenen Matrizen inversen Matrizen. Diese Regeln gelten jedoch nur unter einschränkenden Voraussetzungen für die Teil-Vp., aus denen sich der Gesamt-Vp. zusammensetzt. Für die Gültigkeit der Zusammensetzungsregeln werden notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt.

Cauer (Göttingen).

Cauer, W.: Ein Reaktanztheorem. S.-B. preuß. Akad. Wiss., H. 30/32, 673—681 (1931).

Unter „Reaktanzen“ werden elektrische Netzwerke aus Selbst- und Gegeninduktivitäten und Kapazitäten verstanden. Damit eine Funktion $f(\lambda)$ des Frequenzparameters $\lambda = i\omega$ (ω = Kreisfrequenz) die Charakteristik einer Reaktanz mit einem freien Klemmenpaar darstelle, ist es notwendig und hinreichend, daß $f(\lambda)$ im Inneren der rechten λ -Halbebene regulär ist und dort nicht negativen Realteil hat sowie für reelle reell und für imaginäre λ rein imaginär ist (Satz von Foster). Solche und nur solche

Funktionen lassen sich in der Gestalt $f(\lambda) = \lambda \cdot \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{\lambda^2 + b_s} + L\lambda + D\lambda^{-1}$ schreiben,

wo $a_s > 0$, $b_s > 0$, $L \geq 0$, $D \geq 0$ ist. Cauer beweist ein entsprechendes Reaktanztheorem für allgemeine Reaktanzen mit n freien Klemmenpaaren. Ein solches Netzwerk hat $m \geq n$ unabhängige Stromkreise. Die symmetrische m -zeilige Matrix der zugehörigen Strom-Spannungsgleichungen sei $(A) = \lambda(L) + \lambda^{-1}(D)$, wo (L) und (D) die entsprechenden positiv definiten Matrizen der Induktivitäten und reziproken Kapazitäten sind. Durch Elimination der $(m - n)$ Ströme hieraus, die keinem Umlauf mit freiem Klemmenpaar angehören, ergibt sich die n -zeilige Reaktanzmatrix $(Z(\lambda))$ mit den Elementen $Z_{st}(\lambda)$; $(Y(\lambda)) \equiv (Z)^{-1}$ ist ein Hauptminor von $(A)^{-1}$. C. beweist dann, daß eine n -zeilige symmetrische Matrix dann und nur dann eine Leitwertmatrix $(Y(\lambda))$ einer realisierbaren Reaktanz ist, wenn die zugehörige quadratische Form $\sum_{s,t=1}^n Y_{st} x_s x_t$ für jedes Wertsystem von reellen x_1, x_2, \dots, x_n , die nicht alle verschwinden, die oben für die Charakteristik $f(\lambda)$ formulierten Bedingungen erfüllt. Das gleiche wird dann für die zu $(Y(\lambda))$ reziproke Reaktanzmatrix $(Z(\lambda))$ bewiesen. Dieses allgemeine Reaktanztheorem kann auch in der äquivalenten Form ausgesprochen werden: Solche und nur solche symmetrischen Matrizen $(Z(\lambda))$ gehören zu realisierbaren Reaktanzen mit n Klemmenpaaren, deren Elemente sich in der Form

$$Z_{st} = \lambda \sum_{r=1}^m \frac{a_{st}^{(r)}}{\lambda^2 + b_r} + L_{st}\lambda + D_{st}\lambda^{-1}; \quad (m \geq n)$$

schreiben lassen, wobei

$$\sum_{s,t=1}^n a_{st}^{(r)} x_s x_t \geq 0, \quad b_r > 0, \quad \sum_{s,t=1}^n L_{st} x_s x_t \geq 0, \quad \sum_{s,t=1}^n D_{st} x_s x_t \geq 0.$$

Um wirklich zu einer solchen gegebenen Matrix $(Z(\lambda))$ ein zugehöriges realisierbares Netzwerk angeben zu können, müssen im allgemeinen Fall $(n - 1)$ ideale Transformatoren zu den Reaktanzelementen hinzugerechnet werden. Eine allgemeine „kanonische“ Schaltung zum Aufbau einer zu gegebenem $(Z(\lambda))$ gehörigen Reaktanz wird im Beweisverfahren angegeben.

H. G. Baerwald (Berlin).

Klassische Optik.

Herzberger, M.: Linsen, Linsensysteme und Prismen. Sonderdruck aus: Handwörterbuch Naturwiss. **6**, 476—486 (1931).

Durchrechnung des Strahlenganges bei der Brechung durch Ebenen und Kugelflächen im besonderen in einem zentrierten Linsensystem. Die Gesetze erster Ordnung (enge Strahlenbüschel) bei der Abbildung durch dünne und dicke Linsen und Linsensysteme mit Rotationssymmetrie. Die Seidelschen Bildfehler in Rotationssystemen. Der Zusammenhang mit der Theorie des Eikonals. Die Lichtstärke der optischen Systeme. M. Leontowitsch (Moskau).

Herzberger, M.: Die Gesetze zweiter Ordnung in einfach-symmetrischen Systemen. *Z. Physik* **74**, 88—109 (1932).

Der Verf. führt hier Untersuchungen fort, die in seinem Buche „Strahlenoptik“ begonnen sind. Er stützt sich zunächst auf die Gleichung der Wellenfläche, im Hauptteile der Arbeit aber auf die Reihenentwicklung des Eikonals. Die niedrigsten Glieder der Entwicklung geben die Bestimmungsgrößen der Gaussischen Abbildung. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den nächst höheren Gliedern. Diese verschwinden für die Achse einer achsensymmetrischen Folge, nicht aber außerhalb und noch weniger allgemein. Der Verf. beschränkt sich auf den Fall, daß um den Ausgangsstrahl die Abbildung eine Symmetrieebene hat. Die Reihenentwicklung bietet ihm 10 Größen, von denen jedoch nur 8 für die Abbildung einer Stelle des Grundstrahls in Frage kommen. 2 von ihnen kennzeichnen die Zerstreuungsfigur der Abbildung für einen Punkt des Grundstrahls (Öffnungsfehler), 3 die Treue der Wiedergabe bei der optischen Projektion (Verzeichnungsfehler), 3 die Änderung der Abbildung beim Übergang zu einem Nachbarpunkte (Verformungsfehler). Die Wirkung der 5 ersten genannten Fehler wird durch Zeichnungen erläutert, für die Öffnungsfehler ist der Fall der stigmatischen Abbildung besonders wichtig. Weiter wird gezeigt, wie sich die Wirkung der Fehlergrößen ändert, wenn Ding-, Auffang- oder Blendenebene geneigt sind. Endlich wird ausführlich untersucht, wie sich die Abbildungsgrößen ändern, wenn man Ding oder Blende verschiebt. Hierbei kommen auch die vorhin ausgeschlossenen Koeffizienten (Öffnungsfehler der Blende) zu ihrem Recht. Die Fehler bei jeder Ding- und Blendelage sind lineare Funktionen der Größen bei einer bestimmten Lage. Ein Teil der Ergebnisse ist von A. Gullstrand auf andere Weise abgeleitet worden. Hans Boegehold (Jena).

Smith, T.: On absolute refractive indices in geometrical optics. (*Optics Dep., Nat. Physical Labor., London.*) *Trans. Opt. Soc. London* **32**, 37—38 (1931).

Der Verf. behandelt die Frage, ob es nicht praktischer sei, den „absoluten“ Brechungsindex in den Formeln der optischen Abbildung durch den „relativen“ Brechungsindex zu ersetzen, da doch nur dieser für den Abbildungsvorgang eine physikalische Bedeutung hat. Er zeigt, daß sich tatsächlich z. B. die Abbildungsgleichung

$$\frac{n}{a} + \frac{n'}{b} = D = \frac{1}{r} (n' \cos \varphi' - n \cos \varphi)$$

in der Form schreiben läßt

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \Delta = \frac{1}{r} (N \cos \varphi' - \frac{1}{N} \cos \varphi),$$

worin nur der relative Brechungsindex $N = n'/n$ auftritt. Objekt- und Bildabstand sind jetzt jedoch zu beziehen auf zwei konjugierte Punkte mit dem Scheitelabstand p bzw. q , wo

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = D; \quad p = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{N} - 1 \right); \quad q = \frac{1}{\Delta} (N - 1)$$

und demnach

$$a = a' + p; \quad b = b' + q$$

ist. Da diese neuen Bezugspunkte aber keine unmittelbare geometrische Bedeutung haben, so sind die Formeln, die den relativen Brechungsindex zugrunde legen, für praktische Anwendungen ohne Bedeutung, obwohl sie für allgemeine theoretische Untersuchungen wertvoll sein können. Picht (Berlin-Lankwitz).

Günther, Norbert: Versuch einer allgemeinen Theorie zur quantitativen Ermittlung der Abhängigkeit der Brechungsindizes nichtabsorbierender Substanzen von den Änderungen der Dichte. (14. Tag. d. Gauver. Thüringen-Sachsen-Schlesien d. Deutsch. Physik. Ges., Leipzig, Sitzg. v. 9.—10. I. 1932.) Physik. Z. **33**, 175—177 (1932).

Nach einigen geschichtlichen Bemerkungen zeigt der Verf., daß die klassische Dispersionsformel auf die Gestalt gebracht werden kann:

$$n^2 - 1 = f(n) = \sum_k N A_k \frac{\lambda_k^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2}.$$

Hier sind die λ_k die Wellenlängen der Eigenschwingungen, die bei durchsichtigen Stoffen außerhalb des sichtbaren Gebiets liegen. N ist die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit. N und λ_k sind von einer Dichteänderung abhängig, dagegen sind die A_k unabhängig davon. Eine logarithmische Differentiation führt auf:

$$f'(n) dn = f(n) \frac{dN}{N} + 2 \sum_k \frac{d\lambda_k}{\lambda_k} N A_k \frac{\lambda_k^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \left(1 + \frac{\lambda_k^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \right).$$

G. nimmt nun einen in der Richtung s schwingenden polarisierten Strahl an, der auf Resonatoren wirkt, die in der Richtung s die Ausdehnung a_{ks} haben. Er macht den einfachen Ansatz, daß λ_{ks} bei der Dichteänderung proportional zu a_{ks} ist. Er zeigt, daß hieraus folgt $d\lambda_{ks}/\lambda_{ks} = dl_s/l_s$, wo l_s die lineare Ausdehnung des Körpers in der Richtung s ist. Ferner macht er Gebrauch von der Gleichung $dN/N = -dV/V$ (V = Volumen des Körpers) und gelangt zu

$$dn_s = -\frac{1}{f'(n_s)} \left(f(n_s) \frac{dV}{V} - 2 \psi_s \frac{dl_s}{l_s} \right); \quad \psi_s = \sum_k N A_{ks} \frac{\lambda_{ks}^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{ks}^2} \left(1 + \frac{\lambda_{ks}^2}{\lambda^2 - \lambda_{ks}^2} \right).$$

G. erwähnt, daß bei Voigt und Neumann ähnliche Gleichungen auftreten. Für allseitig gleichen Druck bekommt er

$$dn = -\frac{1}{f'(n)} \left(f(n) - \frac{2}{3} \psi \right) \frac{dV}{V},$$

unabhängig von s . — Die Funktion ψ erhält, wenn man sich auf die Eigenschwingungen λ_r und λ_v beschränkt, die dem sichtbaren Gebiet am nächsten liegen, ferner $N A_k \lambda_k^4 = M_k$ setzt, und endlich höhere Potenzen kleiner Glieder vernachlässigt, auch die Form

$$\psi = \frac{M_v}{\lambda_v^3} \left(1 + 2 \frac{\lambda_v^2}{\lambda^2} + 3 \frac{\lambda_v^4}{\lambda^4} \right) + \frac{M_r}{\lambda_r^2} \frac{\lambda^4}{\lambda_r^4}.$$

G. erwähnt zum Schluß, daß er seine Theorie durch Versuche am Quarz bestätigt habe.

Hans Boegehold (Jena).

Astronomie und Astrophysik.

Jekhowsky, Benjamin: Sur l'angle S qui détermine l'orientation j du grand cercle de recherche des astéroïdes. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 530—532 (1932).

Møller, Jens P.: Table giving $\tan \frac{\nu}{2}$ in parabolic motion with argument $M = (t - T) q^{-3/2}$ from $M = 275$ to $M = 4515$. Math.-fys. Medd. Danske Vid. Sels. **11**, Nr 8, 1—12 (1932).

Volet, Ch.: Calcul des orbites d'étoiles doubles paraboliques. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 532—534 (1932).

Banachiewicz, Thadée: Sur le calcul des hypothèses dans la méthode Gauss-Encke de la détermination des orbites. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 355—357 (1932).

Es wird vorgeschlagen, zur Bestimmung des Verhältnisses Ellipsensektor zu Dreieck den Enckeschen Winkel γ zu verwenden in der Form $\sin \gamma = s/(r_1 + r_3)$, wo $s = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2}$ die Sehne, r_1, r_3 die heliozentrischen Lagevektoren des Planeten sind.

A. Klose (Berlin).

Banachiewicz, Thadée: Sur la détermination des constantes vectorielles de l'orbite d'après deux lieux héliocentriques de l'astre. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 527—530 (1932).

Die Gibbsschen Konstanten zur Bestimmung einer Bahn aus zwei heliozentrischen Örtern werden aus der die beiden Örter verbindenden Sehne und dem Abstand der Sonne von dieser Sehne bestimmt. [Siehe auch C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 355 (1932); vgl. vorstehendes Ref.] *A. Klose (Berlin).*

Hamy, Maurice: Sur une propriété de l'équation obtenue en égalant à zéro la distance de deux planètes P, P_1 qui ne se rencontrent pas en des points réels. C. R. Acad. Sci. Paris **193**, 1357—1360 (1931).

Hamy, Maurice: Sur une propriété de l'équation obtenue en égalant à zéro la distance de deux planètes P, P_1 qui ne se rencontrent pas en des points réels. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 146—149 (1932).

Hamy, Maurice: Sur l'équation obtenue en égalant à zéro la distance de deux planètes qui ne se rencontrent pas en des points réels. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 329—333 (1932).

Die betreffende Gleichung hat die Form:

$$e^2 \cdot z^4 + (A + Bi)z^3 + C \cdot z^2 + (A - Bi)z + e^2 = 0,$$

wo $z = E^{iu}$, u die exzentrische Anomalie, e die Exzentrizität des Planeten P und E die Basis der Neperschen Logarithmen bedeutet. Die A, B und C sind Funktionen der Bahnelemente, der wahren Anomalien und des Radiusvektors r_1 , des Planeten P_1 .

Da die vier Wurzeln das Produkt 1 haben, sind sie von der Form: $\varrho E^{-i\lambda}$, $\frac{1}{\varrho} E^{-i\lambda}$, $\varrho_1 E^{i\lambda}$, $\varrho_1 E^{-i\lambda}$, und führen wir

$$y_1 = \cos 2\lambda, \quad y_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho}{\varrho_1} + \frac{\varrho_1}{\varrho} \right), \quad y_3 = \frac{1}{2} \left(\varrho \varrho_1 + \frac{1}{\varrho \varrho_1} \right)$$

ein, sind die drei y die reellen Wurzeln der Gleichung:

$$4e^4 y^3 - 2Ce^2 y^2 + (A^2 + B^2 - 4e^4) y + 2Ce^2 + B^2 - A^2 = 0$$

und erfüllen die Bedingungen $-1 < y_1 < 1 < y_2 < y_3$. Es wird nun $e = \sin \psi$ eingeführt und in den zwei ersten Mitteilungen der Beweis geliefert, daß die Größe ϱ ($> \varrho_1$) immer größer als $\cot \psi/2$ ist, wenn nur nicht die gegenseitige Neigung der Bahnebene, I , gleich Null ist, ein Fall, der hier ohne Interesse ist. Danach werden einige Spezialfälle studiert, besonders der Fall $B = 0$. — Dann hat die Gleichung in y eine Wurzel gleich 1 und reduziert sich auf: $4e^4 y^2 - 2e^2(C - 2e^2) y + A^2 - 2Ce^2 = 0$. Zwei Fälle sind dann möglich: 1. $y_1 = \cos 2\lambda = 1$, und y_2, y_3 sind die Wurzeln der Gleichung. 2. $y_2 = 1$ und y_1, y_3 die zwei Wurzeln. Diese beiden Fälle werden auf ihre Konsequenzen näher untersucht.

Burrau (Kopenhagen).

Brown, Ernest W.: The development of the disturbing function with large values of the ratio of the distances. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **92**, 224—227 (1932).

Entwickelt man die negativen Potenzen der relativen Distanz $A = (1 - 2\alpha \cos S + \alpha^2)^{1/2}$ zweier einander störender Körper in Cosinusreihen, so lassen sich die Fourier-Koeffizienten als Reihen nach Potenzen von $f(\alpha) = f(r/r')$ berechnen. Sobald α nahe gleich 1 wird, empfiehlt sich die Entwicklung nach Potenzen von $p - \kappa$, wo $p = \alpha^2/(1 - \alpha^2)$ und κ eine positive ganze Zahl ist. Je näher α an 1 ist, um so größer ist κ zu wählen. Bei Verwendung von $p - 1$ als Entwicklungsparameter ist die Darstellung bis $\alpha = 0,82$ für astronomische Bedürfnisse ausreichend, bei $p - 4$ kann (bei denselben Genauigkeitsansprüchen) die Darstellung bis $\alpha = 0,91$ verwandt werden. Die Veröffentlichung numerischer Tafeln wird für die nächste Zeit in Aussicht gestellt, die Methode zu ihrer Berechnung wird beschrieben, ein Beispiel zeigt die rasche numerische Konvergenz der Reihen. *A. Klose (Berlin).*

Finsen, W. S.: The determination of dynamical parallaxes of double stars. (Union Observ., Johannesburg.) Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **92**, 47—52 (1931).

The author discusses relative merits of various formulae for the determination of dynamical parallaxes — d_1 — from the observed motions. There are known at the

present time three formulae of such kind — those by Comstock, Russell-Hertzsprung and Jackson. All they consist of two factors; first one depending on the observed quantities (such as angular velocity θ' , separation of the components — s , areal constant — c , projected relative velocity — w), the second factor is a function of unknown orbital elements and is to be determined by averaging in a statistical way. Both factors are supposed to be independent. — The author follows Hertzsprung's suggestion, that considerable improvement would result if use were made of the angle ψ between radius vector and the direction of motion in the apparent orbit (ψ is an observable quantity). From this point of view Comstock's formula appears to be objectionable as its two factors are strongly correlated. In this method a mean is taken of quantities which vary enormously, where as in fact different values should be used for different values of ψ . In Russell-Hertzsprung formula the second factor still varies slowly with ψ (entering in the first factor), owing among other things to the fact, that frequency distribution of e varies with ψ . The author calculates probability function $P(e)$ for various values of ψ and finds it to be very different for different groups but without any serious influence on the validity of the Russell-Hertzsprung's formula. Finally he derives two formulae: first, for the determination of d_1 for binaries where owing to lack of observations only a small observed arc is available but the period P is known and the second — for P as a function of θ' , s and s'' .

B. P. Gerasimovič (Charkow).

Mineur, Henri, et Pierre Guintini: Étude analytique des mouvements d'ensemble des étoiles à hélium. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 61—63 (1932).

Eine von Mineur [C. R. Acad. Sci. Paris **193**, 222—224 (1931); vgl. dies. Zbl. **2**, 239] angegebene Methode, die Rotation des Sternsystems rein kinematisch abzuleiten, wird nach einer graphischen Behandlung durch Guintini [C. R. Acad. Sci. Paris **193**, 225—229 (1931)] nun auch analytisch für dasselbe Material (700 B-Sterne) durchgeführt. Aus den rechtwinkligen Komponenten X , Y des Geschwindigkeitsvektors V jedes Sternes werden für 38 quadratische Felder der galaktischen Ebene die Mittelwerte \bar{X} , \bar{Y} gebildet und durch Polynome 3. Grades in den Koordinaten x , y dargestellt. Daraus wird berechnet

$$\text{rot } V = \Phi = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{X}}{\partial y}$$

$$\text{und}$$

$$\text{div } V = \Psi = \frac{\partial \bar{X}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial y}.$$

Wenn das Sternsystem (bei gleichzeitiger Ausdehnung) rotiert, müssen die Kurven $\Phi = \text{const.}$ und $\Psi = \text{const.}$ Kreise um das Rotationszentrum sein; aus den genannten interpolatorischen Ansätzen ergeben sich Ellipsen. Die numerischen Daten sprechen für eine Rotation des Lokalsystems um ein nahes Zentrum (150—200 parsec Entfernung) in Carina; sie sind unvereinbar mit der Theorie von Oort und Lindblad (Rotation des größeren galaktischen Systems um ein fernes Zentrum im Sagittarius). Die Möglichkeit, daß dieses Ergebnis durch lokale Sternströme vorgetäuscht ist, wird von den Verff. verneint.

Wempe (Göttingen).

Lichtenstein, Leon: Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. VI.: Weitere Beiträge zur Maxwell'schen Theorie der Saturnringe. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **1**, 173—213 (1932).

Es bezeichne Ω das dynamische System mit kontinuierlich vielen Freiheitsgraden, das aus einer mit inkohärenter Materie von konstanter Dichte μ gleichmäßig belegten Kreislinie K vom Radius R und aus einem sich im Mittelpunkt des Kreises befindlichen Massenpunkt M besteht, wobei das Gravitationspotential als logarithmisch angesetzt wird, so daß für die die Kräfte darstellenden Integrale nur die Cauchyschen Hauptwerte existieren. Dieses System wird sich im Sinne der Bewegungsgleichungen nur dann im (relativen) Gleichgewicht befinden, wenn der „Ring“ K um den „Saturn“ M mit einer durch μ , M und R bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmten Drehgeschwindigkeit gleichmäßig rotiert, wobei dann die Gravitationswirkung durch die Zentrifugalkräfte exakt kompensiert wird. Diese Gleichgewichtslösung ist nicht mehr möglich für das erweiterte System, das aus dem ursprünglichen durch Hinzufügen

eines um M gleichmäßig rotierenden „Mondes“ von der Masse ν entsteht. Es erhebt sich daher die Frage nach der Existenz einer Schar von periodischen Lösungen mit dem Scharparameter ν , die für $\lim \nu = 0$ in die Kreislösung des ungestörten Systems übergehen. Dieses Problem ist vom Verf. in einer früheren Arbeit [Math. Z. **17**, 62 (1923)] unter der vereinfachten Annahme behandelt worden, daß nicht nur ν , sondern auch μ als ein störender, d. h. kleiner Parameter vorausgesetzt werden darf. Das Problem ist wesentlich schwieriger als die analoge Fragestellung der Poincaréschen Sortentheorie, bei der es sich doch um nur endlich viele Freiheitsgrade handelt und die nach E. Hölder den feineren Methoden des Verf. ebenfalls zugänglich ist. In der vorliegenden Arbeit wird die Annahme, daß μ klein ist, fallengelassen. — Die Bewegungsgleichungen werden in den vom Verf. in seinen Arbeiten stets verwendeten Koordinaten angesetzt, die einer bequemen Durchführbarkeit der Störungsrechnung angepaßt sind. Es werden zunächst die Variationsgleichungen berechnet und die dynamischen Konstanten derart gewählt, daß die Lösungen dieser linearen Integro-Differentialgleichungen sich mit dem störenden Mond in keiner „Resonanz“ befinden. Dieser Ausschluß von nicht-trivialen Eigenlösungen entspricht in der erwähnten Poincaréschen Analogie dem Ausschluß der sog. kritischen Kommensurabilitäten und bedingt den Ausschluß nur von diskreten Werten der dynamischen Konstanten. Die Berücksichtigung der in den Variationsgleichungen noch vernachlässigten nichtlinearen Terme erfolgt, wie in anderen Untersuchungen des Verf., durch Auflösung eines unter Benutzung von Greenschen Funktionen erhaltenen Systems von nicht-linearen Integro-Differentialgleichungen mittels der Methode der sukzessiven Approximationen. Der Nachweis für die zum Konvergenzbeweis der schrittweisen Näherungen notwendigen Abschätzungen bildet den springenden Punkt der Untersuchung und erfordert die Heranziehung von funktionentheoretischen Hilfsmitteln. Die Rückwirkung des Ringes auf den Zentralkörper und seinen Mond wird nicht in Betracht gezogen, was aber, soweit der Ref. sehen kann, nur eine Vereinfachung der Behandlung bedeutet, während die Methode in Kraft bleiben würde. — In dem zweiten Kapitel wird die Kreislösung des ungestörten Systems Ω nicht dadurch gestört, daß man von $\nu = 0$ zu $\nu > 0$ übergeht, sondern dadurch, daß ν ständig verschwindet und nur die Integrationskonstanten abgeändert werden, so daß also nach einer Schar von (nichtlinearen) freien periodischen Schwingungen des ursprünglichen Systems gefragt wird, die bei gegen Null konvergierendem Scharparameter gegen die Kreislösung des relativen Gleichgewichts konvergieren und die als in dem Ring sich fortpflanzende Wellen bezeichnet werden können. Loc. cit. ist auch dieses Problem nur unter der Annahme behandelt worden, daß μ hinreichend klein ist, was jetzt nicht mehr vorausgesetzt wird. Die Methoden für den Konvergenzbeweis sind denjenigen des ersten Kapitels analog, und nur in dem möglichen Verhalten der Verzweigungsgleichungen gibt es einen Unterschied. Wintner (Baltimore).

Rosseland, S.: On the theory of oscillating fluid globes. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo, Math.-naturwiss. Kl. Nr. 7, 1–22 (1932).

In this paper the author extends his former work on stellar pulsations (vgl. dies. Zbl. **2**, 439) to cases in which the vibrations are not restricted to be radial. He first applies his methods to the homogenous liquid globe and derives Thomson's (Kelvin) results, the vibrations being represented by series of spherical harmonics. Next he generalises this to the heterogeneous liquid globe, for which the „variational“ equations are

$$-\varrho_0 \sigma^2 \xi + \varrho' g_0 + \varrho_0 g' + \nabla p' = 0,$$

$$\operatorname{div} \xi = 0, \quad \varrho' + \xi \nabla \varrho_0 = 0,$$

where

$$\operatorname{div} g' = 4\pi G \varrho' = -4\pi G \xi \nabla \varrho_0. \quad [\xi \text{ proportional to } e^{i\sigma t}]$$

The notation is the same as before, and the density and pressure at a point are given by $\varrho = \varrho_0 + \varrho'$, $p = p_0 + p'$, where ϱ_0, p_0 are the equilibrium values. By the use of expansions in spherical harmonics he reduces the problem to the solution of an ordinary linear differential equation of the fourth order. The work is finally extended to gaseous spheres with and without adiabatic changes of state. The variational equations become

$$-\varrho_0 \sigma^2 \xi + \varrho' g_0 + \varrho_0 g' + \nabla p' = 0,$$

$$p' = \varrho_0 g_0 \xi - \gamma p_0 \operatorname{div} \xi + \frac{i\nu}{\sigma} (\varepsilon' - \operatorname{div} F'),$$

$$\varrho' = -\operatorname{div} \varrho_0 \xi, \quad \operatorname{div} g' = 4\pi G \varrho'. \quad [\xi \text{ proportional to } e^{i\sigma t}]$$

Here γ is the ratio of the specific heats of the matter + radiation, t', F' are the perturbation in the rate of energy-generation and in the radiation flow, and $\nu = \frac{\partial P / \partial T}{\partial E / \partial T}$.

Using an approximation for g' , which nevertheless takes into account the explosive instability which sets in when γ becomes less than $4/3$, the problem is reduced to the solution of an ordinary differential equation of the second order. The question of stability is examined, and a „coefficient of stability“ is evaluated. The value of the coefficient of stability for a star built on his standard model given in his first paper is revised, and it is shown that such stars are always stable, independently of their mass. The author's results will have applications in the oscillations of rotating stars. *W. H. McCrea.*

Eddington, A. S.: Polytropes. *Naturwiss.* 1932, 162—164.

Schilt, Jan: Remarks on professor Gerasimovič's paper, „luminosity curve of early B stars“. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 92, 137—140 (1931).

Nach einer von Strömberg [*Astrophys. J.* 71, 163—174 (1930)] entwickelten Methode hat Gerasimovič [*Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 91, 537—548 (1931)] für die Leuchtkräfte der frühen *B*-Sterne (*B0—B2, B3, B5*) aus pekuliären Eigenbewegungen und Radialgeschwindigkeiten Verteilungsfunktionen abgeleitet, die je 3—4 Maxima und Minima zeigen. Verf. gibt numerische Beispiele dafür, daß glattere Verteilungskurven die empirischen Daten ebenso gut darstellen; die von Gerasimovič gefundenen starken Schwankungen brauchen also nicht reell zu sein. *Wempe.*

Starke, D.: Der Reibungskoeffizient im Inneren überdichter und aus stark entarteter Materie bestehender Sterne bei Berücksichtigung der relativistischen Korrekturen. (*Univ.-Sternw., Jena.*) *Astron. Nachr.* 245, 1—6 (1932).

Im Anschluß an eine vorhergehende Arbeit über die Wärmeleitung [*Astron. Nachr.* 244, 177 (1931); dies. Zbl. 3, 184] untersucht die Verf. den Einfluß der relativistischen Korrekturen bei hohen Elektronengeschwindigkeiten auf den Koeffizienten η der inneren Reibung. Für den Impulstransport pro Flächen- und Zeiteinheit gilt

$$y = -\eta \frac{dv}{dx} = -\frac{4\pi}{h^3} \frac{dv}{dx} \int_0^\infty l f(p) p^3 dp,$$

wobei v die Massengeschwindigkeit, l die freie Weglänge, f die Fermische Verteilungsfunktion und p der Impuls der Teilchen. Ist die freie Weglänge konstant, so wird der Reibungskoeffizient im nichtentarteten Gebiet

$$\eta = \frac{2}{3} n l \left(\frac{2 m_0 k T}{\pi} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{9}{8} \tau + \frac{123}{256} \tau^2 + \dots \right],$$

wobei n die Anzahl der freien Elektronen pro Volumeneinheit, m_0 die Ruhmasse des Elektrons und $\tau = \frac{kT}{m_0 c^2}$. Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem klassischen Wert um den Faktor in der eckigen Klammer. Bei völliger Entartung wird

$$\eta = \frac{2\pi h}{3} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{4/3} l.$$

Hier haben die relativistischen Korrekturen keinen Einfluß. Ist die freie Weglänge variabel, so ist in dieser Formel l zu ersetzen durch einen Mittelwert \bar{l} , doch ist der Prozeß der Mittelwertbildung verschieden, je nachdem die relativistischen Korrekturen zu vernachlässigen oder wesentlich sind. *Siedentopf (Jena).*

Suzuki, Seitarrō: The thermo-equilibrium of atom-nuclei at high temperatures. (The fourth Rep.) (*Meteor. Stat., Univ., Fukuoka.*) *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 13, 277—281 (1931).

Der Verf. revidiert seine früheren Berechnungen über die thermische Dissoziation von Atomkernen im Sterninneren unter Berücksichtigung der dabei auftretenden wellenmechanisch zu erwartenden Effekte, insbesondere des durch die Quantenmechanik zu erwartenden Eindringens von Teilchen in Kerne. Er zeigt, daß bei den höchsten Temperaturen auch hier schließlich eine Dissoziation aller Kerne in α -Teilchen, Protonen und Elektronen bzw. in Protonen und Elektronen erwartet werden muß. Dabei wird ebenfalls der Einfluß der „Resonanzeindringung“, d. h. der Umkehrung der spontanen

radioaktiven Zerfallsprozesse diskutiert. Der Autor gibt ferner an, daß die Wärmeentwicklung der Sterne nicht durch Atomkernsynthese zu schwereren Kernen erklärbar ist, da sich dann zu kleine Zahlen für das Alter der Sterne ergäben. Die Hypothese der gegenseitigen Vernichtung von Protonen und Elektronen ist wohl geeignet, die hohe Energieausstrahlung der Sterne zu erklären. Doch scheint dem Verf. die Milnesche Auffassung, daß der Energieverlust der Sterne durch Massenvernichtung von Protonen und Elektronen zu erklären ist, kaum zulässig, da hierbei der Dissoziationsgrad unabhängig von der Temperatur wäre und eine Abkühlung des Sterns nicht von einer höheren Dissoziation in Elektronen und Protonen begleitet wäre, so daß die Energiezufuhr aufhören müßte.

Houtermans (Berlin-Charlottenburg).

Biermann, Ludwig: Untersuchungen über den inneren Aufbau der Sterne. III. Über Sternmodelle mit entartetem Kern. (*Univ.-Sternw., Göttingen.*) *Z. Astrophys.* 4, 61—69 (1932).

In dieser eingehenden Diskussion der Sternmodelle mit entartetem Kern geht Verf. von der Voraussetzung aus, daß die gesamte Strahlungsenergie im Kern erzeugt wird und daß für die nichtentarteten Teile des Sternes das Kramersche Gesetz für den Massenabsorptionskoeffizienten in voller Geltung ist. Betrachtungen über den Zustand des Kernes, wobei über die Arbeiten Chandrasekhars, Fowlers, Paulis und Strömgrens berichtet wird, sowie Überlegungen über die Möglichkeit, einen Kern einzupassen, ergeben, daß entartete Kerne mit mehr als einigen Prozenten der Gesamtmasse nicht stetig in von außen her integrierte Lösungen eingebaut werden können. Die Existenzfähigkeit kleinerer Kernmassen wird als möglich angesehen. Es wird gezeigt, daß Modelle mit Kern nur so möglich sind, daß einerseits der Kern nur einen ganz geringen Bruchteil der Gesamtmasse enthält, und andererseits in dem Übergangsbereich zwischen dem — im allgemeinen relativistisch entarteten — Kern kräftige Strömungen eine Art dynamischer Stabilität ermöglichen. Die Sternmodelle mit Kern führen zu etwas höheren Temperaturen als die Eddingtonsche Theorie, doch sind dieselben noch nicht genügend hoch, um eine Vernichtung der Materie zu bewirken. Kotharis Untersuchungen führen sogar zum Ergebnis, daß zwischen Materie und Strahlung in den entarteten Zuständen kein Gleichgewicht bestehen kann. Die größten Schwierigkeiten beim Lösen der vorgehenden Probleme liegen in der Unkenntnis der Art der Energieerzeugung im Sterninnern, sowie in der mangelhaften Kenntnis über den Massenabsorptionskoeffizienten (vgl. dies. Zbl. 2, 438).

Hubert Slouka (Prag).

Milne, E.: Théorie thermodynamique des états d'équilibre anisothermique. *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Otdél. mat. i estest. Nauk, VII, s. Nr 7, 1013—1024* (1931) [Russisch].

Dans les recherches cosmogoniques, on admet ordinairement à priori une hypothèse sur l'état de phase thermodynamique du système (astre) considéré. L'auteur pense que de pareilles hypothèses ne sont pas admissibles, et que la phase doit être calculée d'après les données du problème. Ces données sont: la masse totale M , la distribution ε des sources d'énergie (de sorte que $L = \int \varepsilon \rho \, dv$ est l'énergie totale émise par l'astre), le pouvoir absorbant et la conductivité thermique. L'auteur expose un procédé de calcul qui permet en principe de déterminer la masse $M(r)$, la pression $p(r)$ et la température $T(r)$ comme fonctions du rayon-vecteur r (symétrie sphérique). En supposant p , T et ρ liés par l'équation qui correspond à la phase gazeuse, on intègre un système d'équations à partir de la couche superficielle ($r = r_0$). Si l'on parvient, pour $r = r'$, à des valeurs de p et de T , pour lesquelles la phase gazeuse ne peut plus exister, on admet, à partir de $r = r'$, l'existence d'une autre phase. La valeur r' se détermine par la condition de l'égalité des potentiels chimiques pour les deux phases. En procédant ainsi de suite, on cherche à obtenir une solution pour laquelle $M(r)$ s'annule avec r . — L'allure de la fonction $M(r)$ donne lieu à une classification des états d'équilibre des étoiles pour divers valeurs de M et de L . La possibilité d'un passage discontinu d'un état d'équilibre à un autre est confirmée par l'apparition des étoiles du type des Novae. *V. Fock* (Leningrad).